Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

1996 рік

1. Дійсні числа x, y, a такі, що:
$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$
При якому значенні a добуток xy набуває найменшого значення?

2. Довести нерівність
$$(x + y)(x + y + 2\cos x) + 2 \geqslant 2\sin^2 x.$$
При яких значеннях x і y досягається рівність?

3. Довести нерівність
$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha < \frac{3}{4}.$$

4. Побудувати трикутник, якщо відомі a, A, r.

5. Чи є періодичними функції
$$y = \sin\sqrt{x}, \quad y = \sin\alpha x + \sin x,$$
де α — ірраціональне число? Відповідь обґрунтувати.

6. Довести, що параболи
$$y = 4x^2 - 4 \quad \text{та} \quad x = \frac{1}{3}y^2 - 3$$
перетинаються у чотирьох точках, що лежать на одному колі. Знайти координати центра та радіус цього кола.

7. Зобразити на координатній площині множину точок (x, y), координати яких задовольняють нерівність
$$2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2} > 0.$$

8. Знайти область значень функцій
   (a) $y = 4\cos^2 3x + 6\sin 3x \cos 3x - 4\sin^2 3x + 14$,
   (b) $y = x + 1 + \frac{4}{x}$.

9. Розв'язати рівняння
   (a) $5^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2} + \log_5 \sin x} = 15^{\frac{1}{2} + \log_{15} \cos x}$;
   (b) $\sin^{19} x - \cos^{11} x = 1$;
   (c) $\sqrt{\cos x} = \cos \frac{3}{4}x$.

10. Розв'язати нерівність $[x^2] - 3[2x] + 4 \leqslant 0$, де $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

11. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння $x^3 - 13x - a = 0$ має три різні цілі корені. Знайти ці корені.

12. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos y - 2 = 0. \end{cases}$$

13. Розв'язати нерівність

$$|x|^{\log_{\frac{3}{\pi}} \sin 4\pi x} \geqslant 1.$$

14. Довести, що при будь-якому простому $p \geqslant 5$ число $p^2 - 25$ ділиться на 24.

15. Через діагональ куба, ребро якого дорівнює a, провести площину так, щоб площа перерізу цієї площини з кубом була найменшою (найбільшою). Знайти цю площу.

16. Довести, що площі опуклих чотирикутників, у яких середини сторін збігаються, однакові.