

# Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2000 рік

1. Пасажир метро спускається вниз по рухомому ескалатору за 24 секунди, а по нерухомому — за 42 секунди. За скільки секунд пасажир спуститься вниз, стоячи на рухомому ескалаторі?
2. Довести, що при будь-якому натуральному числі  $n$  число  $10^n + 18n - 1$  ділиться на 27.
3. Довести, що квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , коефіцієнти якого задовольняють нерівність  $(a + b + c)c < 0$ , має два різні дійсні корені.
4. Чи може дискримінант квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  з цілими коефіцієнтами  $a, b, c$  дорівнювати 1999? Відповідь обґрунтувати.
5. Розв'язати нерівності:
  - (a)  $4x/(x^2 + x + 3) + 5x/(x^2 - 5x + 3) \leq -3/2$ ;
  - (b)  $\log_2(|x + 1| - |x - 1|) \geq x^2 - 7x + 11$ .
6. Скільки розв'язків в залежності від параметра  $a$  має система рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = x + y - 2a? \end{cases}$$

7. При яких значеннях параметра  $a$  рівняння

$$8 \sin \left[ \frac{\pi}{(3 \cdot 2^{1+|x^2-2x-3|})} \right] = |x - a| + |x - a - 4|$$

має розв'язки? Знайти ці розв'язки.

8. Знайти всі значення параметра  $a$ , при яких найменше значення функції  $y = x^2 - ax - 1$  на відрізку  $[0, 1]$  дорівнює найбільшому значенню цієї функції на відрізку  $[1, 2]$ .
9. Побудувати графіки функцій:
  - (a)  $y = \log_{x-2}(-x^2 + 7x - 10)$ ;
  - (b)  $y = f(x) - g(x)$ , де

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{якщо } |x| > 2, \\ x-2, & \text{якщо } |x| < 2, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x+4, & \text{якщо } x < -2, \\ -|x|, & \text{якщо } x > -2. \end{cases}$$

10. Чи є періодичними такі функції:

- (a)  $f(x) = \sin x^2$ ;

- (b)  $f(x) = \sin(1/x)$ ;

- (c)  $f(x) = \sin 2x + \sin 8x$ ?

Відповідь обґрунтувати.

11. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} x - \sin 2x = \cos [x + \pi/4] - \operatorname{ctg} x.$$

12. Довести, що з медіан будь-якого трикутника  $ABC$  можна побудувати (скласти) трикутник. Чому дорівнює площа такого трикутника, якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $S$ ?
13. Чи може обмежена за розмірами геометрична фігура мати більше одного центру симетрії? Відповідь обґрунтувати.
14. Довести, що коли тангенси половинних кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію, то косинуси цих кутів також утворюють арифметичну прогресію.
15. Довести, що висоти трикутної піраміди перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли:
- (a) вони проходять через точки перетину висот протилежних граней;
  - (b) протилежні ребра піраміди попарно перпендикулярні.
16. Довести, що кожна площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер трикутної піраміди, розділяє її на дві рівновеликі частини (ділить її об'єм навпіл).