Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2001 рік

1. Відстань від пункту A до пункту B пліт пропливає за 24 години. Щоб подолати цей шлях і повернутися назад, катеру потрібно витратити не менше 10 годин. Якщо ж власну швидкість катера збільшити на 40%, то на подолання шляху з пункту A в пункт B і повернення назад йому потрібно затратити не більше 7 годин. За скільки годин пропливе катер шлях з пункту A в пункт B і за скільки годин пропливе він шлях із пункту B в пункт A?

2. У многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ усі коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ є цілими числами. Числа $P_n(0)$ і $P_n(1)$ є непарними. Довести, що такий многочлен не має цілих коренів.

3. Коефіцієнти двох квадратних рівнянь $a_1x^2+2b_1x+c_1 = 0$ та $a_2x^2+2b_2x+c_2 = 0$ задовольняють умову $a_1a_2-2b_1b_2+c_1c_2 = 0$. Відомо, що одне з цих квадратних рівнянь не має дійсних коренів. Чи може мати дійсні корені друге квадратне рівняння? Відповідь обґрунтувати.

4. Чи існують такі цілі числа x, y, z, що справджується рівність
$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 2001?$$

5. Довести, що при будь-якому натуральному n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

6. При яких значеннях x та y вираз
$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 10y + 41}$$
набуває найбільшого значення? Знайти це значення.

7. При яких значеннях параметра a система нерівностей
$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + y^2 + \dfrac{a}{8}, \\ x \geqslant x^2 + y^2 + \dfrac{a}{8} \end{cases}$$
має лише один розв'язок? Знайти його.

8. Зобразити на координатній площині xOy фігуру, яка задається рівнянням
$$|2x - 3y + 7| + |2x + y - 12| + 4|y - 2| = 11.$$
Знайти площу і периметр цієї фігури. Скільки розв'язків в залежності від параметра a має система рівнянь
$$\begin{cases} |2x - 3y + 7| + |2x + y - 12| + 4|y - 2| = 11, \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = a^2? \end{cases}$$

9. Побудувати графіки функції:
   (a) $y = \max\{|x|, 2 - |x|\}$;
   (b) $y = \min\{|x|, x^2\}$;
   (c) $y = \frac{[x]}{x}$;
   (d) $y = \sin x + \frac{2}{\sqrt{\sin x + 2} - \sqrt{\sin x}} - \sqrt{\sin x + 2} - \sqrt{\sin x}$,

де використовують позначення

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} \text{a}, & \text{для } a \geqslant b \\ \text{b}, & \text{для } b > a, \end{cases}$$

$$\min\{a,b\} = \begin{cases} \text{a}, & \text{для } a \leqslant b \\ \text{b}, & \text{для } b < a, \end{cases}$$

а символом $[x]$ позначене найбільше ціле число, яке не перевищує x.

10. При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_{4a+3}(6x-5) \leqslant \log_a \frac{1}{10+x}$$

виконується одночасно при $x = 1$ і $x = 3$?

11. Розв'язати нерівності:

    (a) $|\log_2 x - 4|^{\sin\frac{\pi x}{4}} \geqslant 1$;

    (b) $\log_{x+1}(\log_4(4^x + 12)) < 1$.

12. Розв'язати рівняння:

$$2\pi \sin \frac{x-1}{2} + 3 \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = 3x.$$

13. При яких значеннях параметра a рівняння $1+\sin^4 ax = \sin^{24} x + \cos^{10} x$ має лише один розв'язок? Знайти цей розв'язок.

14. Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб сума довжин відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін, дорівнювала половині периметра цього чотирикутника. Довести це.

15. Знайти всі прямокутні трикутники, довжини сторін яких утворюють арифметичну прогресію. Знайти кути таких трикутників.

16. Площа бічної грані правильної шестикутної піраміди дорівнює S. Знайти площу перерізу, який паралельний бічній грані піраміди і проходить через центр основи піраміди.

17. Трикутна піраміда, усі грані якої є рівні між собою трикутники, називається рівногранною трикутною пірамідою. Довести, що трикутна піраміда буде рівногранною тоді і тільки тоді, коли справджується одна з таких умов:

    (a) усі її грані рівновеликі;

    (b) усі її висоти рівні.