Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2003 рік

1. Є декілька блакитних квадратів, сумарна площина яких дорівнює S. Ці квадрати накладають на жовтий квадрат площею 1 так, щоб сторони блакитних квадратів були паралельні сторонам жовтого квадрату. Чи можна повністю закрити жовтий квадрат незалежно від розміру блакитних квадратів. Розглянути випадки:

   (a) $S = 4$;

   (b) $S = 3$;

   (c) $S = 2,9$.

2. На клітинки шахової дошки розміром $n \times n$ ставляться фішки. Яку найменшу кількість фішок треба поставити, щоб на кожній прямій, яка проходить через центр будь-якої клітинки шахової дошки паралельно вертикалі, горизонталі чи діагоналі дошки, стояла принаймні одна фішка?

3. На площині задано n попарно непаралельних прямих. Через кожну точку перетину двох з цих прямих обов'язково проходить ще якась третя. Довести, що усі n прямих перетинаються в одній точці.

4. Знайти всі натуральні m, для яких виконується рівність $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot (2m-1)! = ((m+1) \cdot m/2)!$, де через $n!$ (n-факторіал) для натурального n позначений добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Чи можна розрізати квадрат на 8 гострокутних трикутників?

6. Знайти параметри a, b, c, що задовольняють умовам:

   (a) корені x_1, x_2 рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ задовольняють нерівностям $x_1 \leqslant 0; 5 \leqslant x_2$;

   (b) парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходить через точку $(1, -5)$;

   (c) площа трикутника ABC приймає найменше можливе значення. Вершина трикутника A має координати $(x_1, 0)$, вершина B — $(x_2, 0)$, а вершина C є вершиною параболи $y = ax^2 + bx + c$.

7. Для кожного значення параметра a розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2y^2z = 32; \\ 2x^4 + y^8 + z^4 = 128; \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

8. Побудувати геометричне місце точок (x, y), для яких існує тупокутний трикутник зі сторонами $x, \sqrt{y}, 1$.

9. В одиничне коло вписано опуклий п'ятикутник, який складається з прямокутника із сторонами a і b та рівнобедреного трикутника з основою a. Серед усіх таких п'ятикутників знайти п'ятикутник найбільшої площі.

10. При яких значеннях параметра p рівняння

$$\log_{0,5}(x^2 + px) + \log_2(x + 2p + 2) = 0$$

має єдиний розв'язок?