

Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2005 рік

1. Знайти квадрат цілого числа, який містить шість цифр, з яких збігаються перша і друга, третя й четверта, п'ята й шоста цифри. Знайти всі розв'язки задачі.
2. При яких цілих n многочлен $2n^3 + 13n^2 - 29n + 9$ буде ділитися на 343?
3. Чи можна зобразити многочлен $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) - 1$, де $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ — попарно різні цілі числа, у вигляді добутку двох многочленів менших степенів з цілими коефіцієнтами?
4. В архіві знайшли табличку чемпіонату міста з футболу, але вона майже вся була зіпсована. Було відомо лише те, що кілька команд зіграли в одне коло (кожна команда зіграла з кожною іншою по одному разу), крім того, команда, що зайняла перше місце, забила 1 гол, команда, що зайняла друге місце, забила 2 голи, і так до останнього місця. При якій мінімальній кількості команд таке можливо, якщо в той час у футболі за перемогу присуджували 2 очка, за нічию — 1 очко, за поразку очок не нараховували. Команда займає місце тим вище, чим більше в неї очок; якщо у двох і більше команд очок порівну, то більш високе місце одержує команда, в якій більша різниця забитих і пропущених м'ячів, у випадку рівності й цих показників вище місце займає команда, в якій більше забито голів.
5. На дошці намальовано трикутник ABC . Висота AH й бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане в трикутник коло в точках M, N і P, Q відповідно. Після цього весь малюнок витерли, залишивши тільки точки H, M, Q . Відновити трикутник ABC . Знайти принаймні один розв'язок.
6. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 163. \end{cases}$$
7. При всіх значеннях параметра a розв'язати систему нерівностей
$$\begin{cases} ax > -2, \\ a + x > 1, \\ 2x^2 - 7x - 5 < 2a. \end{cases}$$
8. Два кола радіусів R і r ($R > r$) дотикаються зовні одне одного. Пряма L перетинає більше коло в точках A, B , менше коло в точках C, D (точки A, B, C, D розташовані послідовно на прямій L). Відомо, що $DC = 4a, CB = a, BA = 2a$. Виразити a через R і r .
9. Знайти суму $\sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x + \dots + n^2 \sin nx$.
10. Знайти рівняння бісектриси тупого кута між прямими, що задані рівняннями $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.