Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2007 рік

Група "А"

1. На декартовій площині задано трикутник ABC, вершини якого мають такі координати: $A(1,1)$, $B(7,7)$ та $C(-1,9)$. Знайти всередині чи на межі цього трикутника таку точку Z, сума відстаней від якої до трьох прямих, на яких розташовані сторони трикутника
   (a) максимальна;
   (b) мінімальна.

2. Знайти усі значення параметра a, при яких система рівнянь має рівно 3 розв'язки:
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3-14, \\ xyz=a. \end{cases}$$

3. Порівняти числа: $\log_{14} 33$ та $\log_{10} 22$.

4. В трикутнику ABC відомі сторони $BC=a$ та кут $\angle BAC=\alpha$. В яких межах може змінюватися медіана $m_a=AD$ цього трикутника?

5. На базу в декількох однакових контейнерах привезли однакові телевізори. Ними повністю заповнили 6 однакових Камазів та 5 однакових Зілів, при цьому ще 12 телевізорів не влізло в жодну з машин. Наступного дня іншу кількість подібних контейнерів перевантажили в 18 Камазів та 20 Зілів, не вліз один телевізор. На третій день заповнили 9 Камазів та 5 Зілів, та ще 5 телевізорів не влізли. Скільки телевізорів поміщалося в один контейнер?

6. Довести, що для будь-якого трикутника ABC, зі сторонами a,b,c та площею S виконується нерівність: $4S \leqslant c^2+2(\sqrt{2}-1)ab$. Для яких трикутників має місце рівність?

7. Знайти найменше натуральне число, яке зменшується в 7 разів, якщо його першу цифру переставити в кінець числа.

8. Для додатних чисел a,b,c довести нерівність:
$$\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+a^2)(c+a)} \geqslant \frac{a+b+c}{4}.$$

9. Гравець ходить конем по шахівниці 8×8. Поле, на якому кінь вже побував, вважається зайнятим. Ставати ще раз на зайняте поле не можна. Гра вважається завершеною, якщо більше не можна піти конем на незайняте поле. Гравець намагається завершити гру якнайшвидше. Через скільки ходів щонайменше і щонайбільше може закінчитися гра? Початкове поле вважається зайнятим.

10. На площині задано 20 точок загального положення, тобто ніякі три точки не лежать на одній прямій. Яке максимальне число опуклих чотирикутників, що попарно не перетинаються, можна побудувати з вершинами в заданих точках при їх довільному розташуванні на площині?

Група "В"

Для кожної запропонованої задачі необхідно написати алгоритм з обґрунтуванням коректності розв'язку та програмну реалізацію на С або Паскалі. Дозволяється застосовувати лише власноруч написані підпрограми. Дискету з програмною реалізацією надсилати не треба.

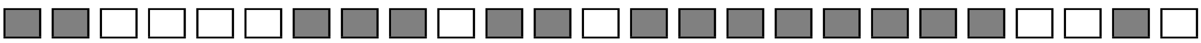
1. **Послідовність чисел.** Є масив рядків, відсортований лексикографічно. Кожний рядок в масиві містить лише цифри, тобто його можна трактувати як число. Числа в кожному рядку не більші за $2 * 10^9$. Відсортувати рядки масиву як числа по зростанню.

Приклад входу	Приклад виходу
"1", "174", "23", "578", "71", "9"	"1", "9", "23", "71", "174", "578"
"172", "172", "172", "23", "23"	"23", "23", "172", "172", "172"

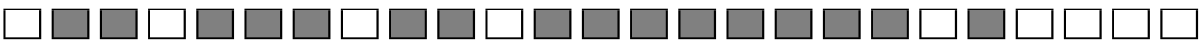
2. **K-ий елемент.** Позначимо через $F(n)$ функцію, яка обчислює кількість одиниць в бінарному представленні числа n. Наприклад, $F(279) = 5$, оскільки $279 = (100010111)_2$. Послідовність X будується наступним чином: $X_0 = 0$, $X_i = A * F(X_{i-1}) + B$. За заданими A, B, K знайти K-ий елемент послідовності X. Відомо, що $0 < A$, $B < 10^6$, $1 < K < 10^9$.

Приклад входу			Приклад виходу
A	**B**	**K**	
0	12	5	12
15	21	500000001	51

3. **Стрічка.** Стрічка довжини n складається з чорних та білих квадратів одиничного розміру. Стрічка кодується послідовністю чисел — кількістю чорних клітин, що стоять поруч зліва направо



Наприклад, наведена вище стрічка має код 2, 3, 2, 8, 1. При цьому не враховується кількість білих клітин, якими розділяються чорні клітини. Вказаному коду задовольняє і така стрічка:



За довжиною стрічки n та її коду знайти кількість різних стрічок, що задовольняють цьому коду. Відомо, що $1 < n < 200$, код має довжину g $(0 < g < (n+1)/2)$ і сам код складається з g натуральних чисел.

Приклад входу			Приклад виходу
n	**g**	**код**	
4	0	{ }	1
5	2	{1, 2}	3

4. **Гармонійні трійки.** Трійка чисел (a, b, c) називається гармонійною, якщо виконується одна із наступних умов:

   (a) НСД$(a, b) = 1$, НСД$(b, c) = 1$, НСД$(a, c) = 1$;

   (b) НСД$(a, b) > 1$, НСД$(b, c) > 1$, НСД$(a, c) > 1$.

Під НСД(a, b) розуміється найбільший спільний дільник чисел a та b. Наприклад, трійка $(2, 3, 4)$ не є гармонійною, а трійки $(3, 4, 5)$ та $(6, 8, 10)$ є гармонійними. За заданим натуральним n $(1 < n < 666666)$ знайти кількість гармонійних трійок (a, b, c), для яких $a < b < c$ та $2 \leqslant a, b, \leqslant n$.

Приклад входу	**Приклад виходу**
4	0
31	1891

5. **Думки навпаки.** На площині розташовано m еліпсів, n кіл та p трикутників таким чином, що вони ділять її на максимально можливу кількість частин s. За заданим значенням s вивести усі такі можливі трійки чисел m, n, p, відсортувавши їх спочатку по m, а потім по n. Відомо, що $0 \leqslant m,\ p < 100$, $0 \leqslant n < 20000$. Якщо для вхідного s жодної трійки (m, n, p) не існує, то вивести Impossible.

Приклад входу	**Приклад виходу**
20	0 0 3 0 1 2 1 0 2 1 3 0
10	Impossible