

**ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА:
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ**

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на факультет кібернетики.

Олімпіада проходить в два тури. Перший - заочний, другий - очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру університетської олімпіади при вступі користуються пільгами, що визначаються Приймальною комісією університету.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати поштою або передати особисто до факультету кібернетики (проспект академіка Глушкова, 2, корпус 6, кімн.29) не пізніше 9 квітня 2010 року розв'язки задач першого туру у зошиті, а також 2 поштових конверти із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище _____

Ім'я _____

По-батькові _____

Область _____

Місто, село _____

Номер школи, клас _____

Адреса школи, телефон _____

Домашня поштова адреса _____

Контактний телефон _____

Електронна адреса (E-mail) _____

Зошити надсилаються за адресою:

01033, Київ-33,

Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

журі олімпіади 2010,

факультет кібернетики, кімн.29

телефон для довідок (044) 521-35-54

Олімпіада факультету кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
2010 року

Заочний тур
(МАТЕМАТИКА)

1. Неважко навести приклад трьох різних натуральних чисел, сума кубів яких дорівнює кубу натурального числа. Чи існують 2009 різних натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ та натуральне число b такі, що $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2009}^3 = b^3$?

2. Нехай $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ – кути трикутника. Встановіть:

а) яке найменше значення може приймати сума $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$?

б) яке найбільше значення може приймати добуток $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$?

3. В тетраедрі протилежні ребра попарно рівні a, b, c . Знайдіть відстані між ними.

4. Чи можна розфарбувати клітинки дошки розміром $n \times n$ у 2 кольори таким чином, щоб будь-які 4 клітини, що стоять на перетині довільних 2 різних стовпчиків та 2 різних рядків, не були пофарбовані в один колір, якщо:

а) $n = 4$;

б) $n = 5$?

5. Нехай x, y, z – цілі числа, які задовольняють рівність $yx^2 + (y^2 - z^2)x + y(y - z)^2 = 0$.

а) Доведіть, що число xu є повним квадратом.

б) Доведіть, що існує нескінченно багато трійок (x, y, z) , які задовольняють цю рівність.

6. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB , A' – основа висоти, проведеної з вершини A . Доведіть: якщо $CA' = \frac{1}{2}AB$, то трикутник ABC – рівносторонній.

7. Знайдіть найменше трицифрове число, що має таку властивість: число, яке утричі більше за нього, має лише парні цифри в десятковому запису.

8. Чи існують опуклий 5-кутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ та точка X всередині цього 5-кутника такі, що виконуються умови $XA_1 = A_3A_4$, $XA_2 = A_4A_5$, $XA_3 = A_5A_1$, $XA_4 = A_1A_2$, $XA_5 = A_2A_3$?

9. Два пірати ділять купу діамантів загальною вагою S . Відомо, що найбільший з діамантів важить M . Вони ділять усю купу на дві менші купки вагою S_1 та S_2 , де $S_1 \leq S_2$, а потім жеребом вирішують, яка кому дістанеться. Доведіть, що:

а) $S_1 \leq S - M$;

б) пірати можуть таким чином поділити купу, щоб $S_1 \geq \frac{1}{2}(S - M)$.

10. Чи буде число $2009^2 + 2010^2 + 4038090^2$ повним квадратом?

ЗАОЧНИЙ ТУР (ІНФОРМАТИКА)

*До кожної запропонованої задачі слід надати алгоритм розв'язку
та написати програму однією з мов програмування*

1. Палиця. Петро має палицю завдовжки 64 сантиметри. Але йому потрібна палиця довжиною x сантиметри ($x < 64$). Петро бажає спочатку розламати вихідну палицю на декілька частин, а потім склеїти з них палицю довжиною x сантиметрів. Для розв'язку задачі Петро бажає скористатися наступним алгоритмом:

1. Петро сумує довжини усіх частинок палиці (спочатку є одна частина довжиною 64 сантиметри). Поки ця сума більша за x , Петро робить наступні дії:

- Петро обирає частинку найменшої довжини та ламає її навпіл;
- Якщо після викидання однієї із половинок сума частин що залишилися не стане меншою за x , то викидаємо її. Інакше обидві половинки залишаються у Петра;

2. Петро склеює усі частинки палиці що є в нього.

Обчислити кількість частинок, яке Петро буде склеювати на другому кроці алгоритму.

Вхід. Бажана довжина палиці x .

Вихід. Кількість частинок, яку Петро буде склеювати на другому кроці алгоритму.

Приклад входу

номер тесту	x
1	32
2	48
3	23

Приклад виходу

1
2
4

2. Формула. Розглянемо формулу $? 1 ? 2 ? \dots ? n = k$. Замість знаків '?' слід поставити знаки '+' та '-' так, щоб отримати вірну рівність. Для заданого k зйти найменше n , для якого існує вказана формула.

Наприклад, для $k = 12$ відповіддю буде $n = 7$, оскільки $-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 = 12$.

Вхід. Ціле значення k .

Вихід. Найменше n , для якого існує вказана формула.

Приклад входу

номер тесту	k
1	12
2	-3646397

Приклад виходу

7
2701

3. Швець. Швець має виконати n робіт, пронумерованих з 1 до n . Для i -ої роботи відомий час її виконання T_i (днів) та штраф S_i , який кожен день має платити швець до тих пір, поки він не здасть i -у роботу замовнику. Знайти послідовність виконання робіт, при якій сума штрафу буде найменшою.

Вхід. Кількість робіт n та масиви t та s , що містять характеристики робіт – значення T_i та S_i .

Вихід. Порядок виконання робіт, при якій сума штрафу буде найменшою. Якщо варіантів відповіді декілька, вивести один із них.

Приклад входу

номер тесту	n	t	s
1	4	{3, 1, 2, 5}	{4, 1000, 2, 5}

Приклад виходу

2 1 3 4

4. Хмарочоси. Лінія обр'ю в місті складається з n будинків, кожний з яких має унікальну висоту від 1 до n . Будинок видно з лівої (правої) сторони, якщо ліворуч (праворуч) від нього не існує будинку з більшою висотою. Наприклад, якщо будинки розташовані у порядку {1, 3, 5, 2, 4}, то з лівої сторони видно будинки з висотами 1, 3, 5, а з правої сторони 4 та 5. Відомо, що будинки розташовані таким чином, що з лівої сторони видно в точності $leftSide$ будинків, а з правої сторони $rightSide$ будинків. Знайти кількість перестановок будинків, для яких це можливо. Результат повернути за модулем 1000000007.

Вхід. Кількість будинків n та цілі значення $leftSide$ та $rightSide$.

Вихід. Кількість перестановок з n будинків, для яких з лівої сторони видно в точності $leftSide$ будинків, а з правої сторони $rightSide$ будинків.

Приклад входу

номер тесту	n	leftSide	rightSide
1	3	2	2
2	5	3	2
3	8	3	2

Приклад виходу

2
18
4872

5. Вечірка. На вечірку запрошено n хлопців та n дівчат. Вони бажають танцювати декілька раундів. В кожному раунді запрошені діляться на n пар що танцюють. Кожний гість має обов'язково бути в деякій парі, кожна пара має складатися з одного хлопця та однієї дівчини. В кожному раунді кожен хлопчик має танцювати з іншою дівчиною та навпаки. Деякі хлопці та дівчата не подобаються один одному. Кожен хлопець може танцювати не більш ніж з k дівчатами, які йому не подобаються. Аналогічно кожна дівчина може танцювати не більш ніж з k хлопцями, які їй не подобаються.

Масив $likes$ описує відношення між хлопцями та дівчатами: $likes[i][j] = 'Y'$, якщо i -ому хлопцю подобається j -та дівчина. Інакше $likes[i][j] = 'N'$. Відношення "подобається" є симетричним. Яку найбільшу кількість раундів зможуть танцювати хлопці та дівчата?

Вхід. Масив $likes$, який описує відношення між запрошеними та ціле число k .

Вихід. Найбільша кількість раундів, яку зможуть танцювати хлопці та дівчата.

Приклад входу

номер тесту	likes	k
1	{"YYY", "YYY", "YYY"}	0
2	{"YYY", "YYN", "YNY"}	0
3	{"YN", "YN"}	1

Приклад виходу

3
2
1