ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА:
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на факультет кібернетики.

Олімпіада проходитиме в два тури. Перший - заочний, другий - очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру університетської олімпіади при вступі користуються пільгами, що визначаються Приймальною комісією університету.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати поштою або передати особисто до факультету кібернетики (проспект академіка Глушкова, 2, корпус 6, кімн.29) не пізніше 9 квітня 2013 року розв'язки задач першого туру у зошиті, а також 2 поштових конверти із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище ____

Ім'я ____

По-батькові ______________________________________

Область ____

Місто, село ______________________________________

Номер школи, клас ________________________________

Адреса школи, телефон ___________________________

Домашня поштова адреса__________________________

Контактний телефон ______________________________

Електронна адреса (E-mail) _______________________

Зошити надсилаються за адресою:
01033, Київ-33,
Володимирська, 64,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади 2013,
факультет кібернетики, кімн.29
телефон для довідок (044) 521-35-54

Олімпіада факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2013 року

Заочний тур
(МАТЕМАТИКА)

1. Послідовність $\{u_n\}$ задана умовами

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n-1}) \forall n \in \mathrm{N}$$

Доведіть, що для всіх натуральних n виконується $|u_n| \le 1$.

2. Розв'язати систему нерівностей в дійсних числах:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z^2 \ge 6, \\ 2x + y^2 + 4z^2 \le 4, \\ x + 4z + 4z^2 \le 0. \end{cases}$$

3. Прямий кут розбито на нескінченну кількість квадратиків 1×1 (як шматок нескінченного аркуша в клітинку). Чи можна в кожному з них поставити натуральне число так, щоб у кожному рядку довільне натуральне число зустрічалося рівно один раз та у кожному стовпчику довільне натуральне число зустрічалося рівно один раз?

4. Розглянемо коло w, що описане навколо гострокутного трикутника ABC. Нехай D – середина дуги BAC, а I є центром вписаного в трикутник ABC кола. Нехай, пряма DI перетинає пряму BC в точці E і перетинає коло w другий раз в точці F. Нехай P – точка на прямій AF така, що пряма PE паралельна прямій AI. Доведіть, що пряма PE є бісектрисою кута BPC.

5. Нехай $a > 1$ – натуральне число. Доведіть, що з нескінченної множини

$$M = \{(a^2 + a - 1), (a^3 + a^2 - 1), (a^4 + a^3 - 1), ..., (a^{n+1} + a^n - 1), ...\}$$

можна вибрати нескінченну підмножину з попарно взаємно простими членами.

Заочний тур
(ІНФОРМАТИКА)

До кожної запропонованої задачі слід надати алгоритм розв'язку та написати програму однією з мов програмування

1. Дріб m/n називається правильним нескоротним, якщо $0 < m < n$ та НСД $(m, n) = 1$ (через НСД тут позначено найбільший спільний дільник). Знайдіть кількість правильних нескоротних дробів зі знаменником n. Вивести відповідь для $n = 2013$.

2. Нехай f(n) – найбільший непарний дільник натурального числа n. За заданим натуральним n необхідно обчислити значення суми f(1) + f(2) + ... + f(n). Вивести відповідь для n = 2013.

3. Скількома способами можна замостити прямокутник розміром $3\times n$ за допомогою доміно 2×1? Вивести відповідь для n = 30.

4. В арифметичному виразі дозволяється використовувати число 1, операції додавання, множення та дужки. Яку мінімальну кількість одиниць потрібно використати, щоб отримати задане натуральне число n? Вивести відповідь для n = 2013.

5. Скільки n-значних чисел можна утворити з двох цифр 5 та 9, в яких три однакові цифри не стоять поруч? Вивести відповідь для n = 30.