

Завдання з математики очного туру олімпіади факультету кібернетики

2005 рік

1. **Перегони.** На площині задано трикутник із цілочисельними координатами $A(1, 1)$, $B(16, 26)$, $C(38, 81)$. На сторонах трикутника у всіх точках з цілочисельними координатами розташовано міста. Автомобілі АЛЬФА і БЕТА виїжджають з A і повинні повернутися до A , подолавши шлях ABC . При виїзді з кожного міста необхідно сплатити мито — 5 монет. Водій АЛЬФА, стартуючи, має 90 монет, водій БЕТА має 80 монет. Чи можуть автомобілі подолати весь шлях і повернутися до A ? Відповідь обґрунтуйте.

2. **Медіанта.** Медіантою двох дробів a/b і c/d називають дріб $(a+c)/(b+d)$. Дріб $1/0$ розглядається як умовний дріб. Його значенням можна вважати нескінченність.

Розглянемо таку процедуру побудови послідовності раціональних чисел. Починаємо з двох дробів $0/1$, $1/0$. На кожному кроці в утворену раніше послідовність дробів додаються медіанти двох сусідніх дробів, які вставляються між цими дробами. Побудова таких послідовностей продовжується нескінченно довго.

Для пояснення. Перші три кроки побудови мають такий вигляд:

$0/1$, $1/0$ (початок);

$0/1$, $1/1$, $1/0$ (перший крок);

$0/1$, $1/2$, $1/1$, $2/1$, $1/0$ (другий крок);

$0/1$, $1/3$, $1/2$, $2/3$, $1/1$, $3/2$, $2/1$, $3/1$, $1/0$ (третій крок).

Довести, що

- (а) На кожному кроці побудова дає впорядковану за зростанням послідовність дробів.
- (б) Медіанти, що вставляються, утворюють нескоротний дріб.
- (с) Кожний нескоротний дріб m/n рано чи пізно потрапляє в побудовану на деякому кроці послідовність.

3. Через точку всередині трикутника провести відрізок з кінцями на сторонах трикутника так, щоб задана точка ділила відрізок навпіл.

4. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\sqrt{\frac{1}{36} + \sqrt{3|x| + x^4}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sin a - \frac{1}{3} \cos^2 a$$

має єдиний розв'язок.

5. Обчислити лишок:

- (а) від ділення числа 2^{1000} на 11;
- (б) від ділення числа $2^{2^{1000}}$ на 11;
- (с) від ділення числа $2^{2^{2^{1000}}}$ на 11.