

Завдання із заочного туру олімпіади

Математика

- a)* Є 6 відрізків різної довжини. З них побудували два трикутники, використавши усі 6 цих відрізків. Чи завжди з цих відрізків можна побудувати трикутну піраміду?

б) Є 6 відрізків різної довжини. З них побудували трикутну піраміду. Чи завжди з цих відрізків можна побудувати два трикутники, використавши усі 6 цих відрізків?
- Нехай a, b, c, d – не усі однакові дійсні ненульові числа, які задовольняють умови: $ac = bd$ та $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$.
- Квадрат $ABCD$ вписаний у коло Γ , точка M лежить на меншій із дуг BC кола Γ . Визначимо точки перетину $P = BD \cap AM$, $R = CD \cap AM$, $Q = BM \cap AC$, $S = BM \cap DC$. Доведіть, що $PS \perp QR$.
- У ряд записана перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, $n \geq 3$. За один крок дозволяється взяти усю цю групу чисел, розділити її на три непорожні частини – ліву, праву та центральну. Далі дозволяється, не змінюючи порядок чисел всередині груп, поміняти місцями ліву та праву групи. Для яких n завжди можна з будь-якої перестановки одержати перестановку у порядку зростання $1, 2, \dots, n$.
- Для натурального числа n позначимо через $d(n)$ кількість натуральних дільників числа, включаючи 1 та n . Знайдіть усі такі натуральні n , для яких у множині: $\{n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \dots\}$ немає жодного квадрату натурального числа.

Інформатика

1. Дружні числа. Два різних натуральних числа називаються дружніми, якщо перше з них дорівнює сумі дільників другого, окрім самого другого числа, а друге дорівнює сумі дільників першого, окрім його самого. Знайти всі пари дружніх чисел, кожне з яких лежить у межах від m до n . Оцінюється швидкість роботи програми.

Формат входу в текстовому файлі. Натуральні числа m і n , де $1 \leq m \leq n \leq 10^6$.

Формат виходу в текстовому файлі. У кожному рядку два дружніх числа, з яких перше менше ніж друге, розділені пробілом, у порядку зростання перших чисел у парах. Якщо пар на заданому проміжку немає, то виводиться -1 .

Приклади

Вхід	Вихід
200 250	-1
200 300	220 284
185000 205000	185368 203432 196724 202444

2. Покриття інтервалами. Відомо, що відрізок числової прямої $[a_0; b_0]$

включається в об'єднання заданої скінченної множини інтервалів $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, ... $(a_n; b_n)$. Вибрати з них найменшу за кількістю підмножину інтервалів, об'єднання яких включає $[a_0; b_0]$. Оцінюється швидкість роботи програми.

Формат входу в текстовому файлі. Рядок містить числа $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$, де в кожній парі перше число не більше ніж друге, усі числа натуральні й не більше 10^9 , а $n \leq 10^5$. Вхідні дані гарантують, що розв'язок існує й єдиний.

Формат виходу в текстовому файлі. У рядку послідовність натуральних чисел $a_{i1}, b_{i1}, a_{i2}, b_{i2}, \dots, a_{ik}, b_{ik}$, для якої кожна точка відрізка $[a_0; b_0]$ належить щонайменше одному з інтервалів $(a_{i1}, b_{i1}), (a_{i2}, b_{i2}), \dots, (a_{ik}, b_{ik})$, причому початок кожного наступного інтервалу належить попередньому. Числа відокремити пробілами.

Приклад

Вхід	Вихід
3 6 2 4 3 5 4 6 5 7 3 6	2 4 3 6 4 7

3. Скарбнички. Хлопчик Вася має скарбнички з грошима, пронумеровані числами від 1 до n . Кожна скарбничка може бути або відкрита її унікальним ключем, або зламана. Вася поклав ключі в деякі зі скарбничок, і пам'ятає, де який ключ лежить. Для того, щоб купити ноутбук, йому потрібні гроші з усіх скарбничок. Визначити мінімальну кількість скарбничок, які для цього доведеться зламати. Оцінюється швидкість роботи програми.

Формат входу в текстовому файлі. У першому рядку записано кількість скарбничок n , де $1 \leq n \leq 10^5$. Другий рядок містить n чисел через пробіл: k -е число – це номер скарбнички, в якій лежить ключ від k -ї скарбнички.

Формат виходу в текстовому файлі. Одне число – мінімальна кількість скарбничок, які необхідно зламати.

Приклад

Вхід	Вихід
5 2 1 1 5 4	2

4. Терези та гирі. Є n гирь з масами $1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}$. На ліву шальку терезів можна покласти предмет із цілою додатною масою m і довільну комбінацію гир, на праву – тільки гирі. Знайти підмножини гир на лівій і правій чашках, які дають рівновагу, якщо це можливо.

Формат входу в текстовому файлі. У першому рядку – кількість гир n , у другому – число m , де $1 \leq n \leq 30, 1 \leq m \leq 2 \cdot 10^9$.

Формат виходу в текстовому файлі. Якщо рівновага неможлива, то вивести -1 . Інакше в першому рядку тексту – маса m і зростаючі маси гир на лівій чашці, у другому рядку – зростаючі маси гир на правій чашці (всі числа через пробіл).

Приклад

Вхід	Вихід
4	5 1 3
5	9

5. Відстань між рядками. Є два рядки з малих латинських літер. Перший

з них потрібно перетворити на другий, на кожному кроці або вилучаючи з рядка його довільний символ, або вставляючи довільний символ у будь-якому його місці. Визначити мінімальну кількість кроків, необхідних для перетворення. Оцінюються швидкість роботи програми та економність використання пам'яті.
Формат входу в текстовому файлі. Два рядки містять послідовності малих латинських літер; довжини рядків не більше 10^5 .

Формат виходу в текстовому файлі. Одне невід'ємне ціле число.

Приклади

Вхід	Вихід
gavgav miaau	7
kvakva gavgav	6