Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Сільвейструк Людмила Миколаївна

УДК 681.3.062

ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ „СУТНІСТЬ-ЗВ'ЯЗОК": ТИПИ СУТНОСТЕЙ, ТИПИ ЗВ'ЯЗКІВ ТА ЇХ ОБМЕЖЕННЯ

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Буй Дмитро Борисович,

доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник

Київ – 2009

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Представлення інформації про предметну область пов'язано з моделюванням даних. На сьогодні існують різні моделі даних, які мають свої переваги та недоліки, і кожна з моделей має свою область застосування.

Початок досліджень в області моделювання даних пов'язано з 80-ми роками минулого століття, коли Е. Кодд (E. Codd) вперше ввів поняття моделі даних [71]. Моделі даних по можливостям побудови опису предметної області в термінах близьких до термінів предметної області можна розділити на дві групи. До першої групи відносяться універсальні моделі даних, такі як *ієрархічна* [30], *мережева* [45], *реляційна* [70], *об'єктно-орієнтована* [27], що дозволяють вирішувати широке коло задач, але при цьому елементи даних цих моделей включають порівняно малий змістовний вміст. До другої групи відносяться моделі, що забезпечують представлення інформації на рівні близькому до уявлень спеціалістів предметної області, яких не цікавить способи представлення даних та їх взаємозв'язків. Моделі другої групи використовують для побудови концептуальних моделей, які потім можна транслювати в моделі першої групи. До даної групи можна віднести, наприклад, *модель „сутність-зв'язок"* [67], *семантичну об'єктну модель* [87].

Однією з найпопулярніших концептуальних моделей даних є *модель „сутність-зв'язок"* (російською – *„сущность-связь"*), або *ER-модель* (*Entity-Relationship model*). На використанні різновидів даної моделі базується більшість сучасних підходів до проектування моделей даних (головним чином, реляційних або об'єктно-орієнтованих). Модель „сутність-зв'язок" є простою візуальною моделлю даних (графічною нотацією).

В дисертаційній роботі розглядається саме модель „сутність-зв'язок", яка є неформальною моделлю предметної області.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, які ведуться на кафедрі теорії та технології програмування факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (КНУ) при виконанні фундаментальних та прикладних тем: „Розробка конструктивних математичних формалізмів для інтелектуальних систем прийняття рішень, обробки знань, еталонування мов сучасних СУБД та CASE-засобів” (№ 0106U005856, 2006-2010 рр.), „Формальні специфікації програмних систем” (№ 08U002463, 2008-2009 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова змістовного фрагменту теорії моделі „сутність-зв’язок”:

– розгляд та уточнення понять структурної частини моделі;

– розгляд та уточнення деяких понять обмежень цілісності моделі;

– математичні дослідження відповідних уточнень.

З огляду на мету в роботі ставляться такі задачі:

– провести історичний огляд еволюції моделі;

– уніфікувати поняття та термінологію моделі;

– уточнити поняття структурної частини моделі та дослідити отриманні уточнення;

– уточнити обмеження кардинальності типів зв’язків, обмеження участі та неперетину, що накладаються на типи сутностей суперклас та підклас і дослідити ці уточнення; зокрема, встановити логічний зв’язок між різними видами обмежень кардинальності.

Об’єктом дослідження є модель „сутність-зв’язок”. Застосовані в дисертації методи дослідження ґрунтуються на теоретико-множинній платформі (теорії відношень та решіток).

Наукова новизна одержаних результатів. Обґрунтована необхідність стандартизації та формалізації моделі.

Розглянуто слабкі та сильні типи сутностей, слабкі та сильні типи зв’язків, сформульована властивість коректності моделі по слабким типам зв’язків.

Уточнені обмеження кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв’язків введенням спеціальних операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}, \mathbf{mop}$; встановлена основна теорема про сумісність значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ для бінарних та багатосторонніх типів зв’язків; встановлені логічні зв’язки між різними видами обмежень кардинальності.

Розглянуто основні елементи розширеної моделі „сутність-зв’язок”: типи сутностей суперклас, підклас та категорія; обмеження, що накладаються на типи сутностей підклас та суперклас. Уточнена вимога коректності моделі щодо успадкування.

Наукове значення роботи полягає у побудові змістовного фрагменту математичної теорії моделі „сутність-зв’язок”; цей фрагмент є необхідною частиною формалізації моделі, на базі якої можна переходити до стандартизації моделі.

Практичне значення одержаних результатів. **Дисертація має теоретико-прикладну спрямованість**. Результати роботи можуть використовуватися, по-перше, при створенні концептуальних моделей даних в класі моделей „сутність-зв’язок”, у тому числі, і за допомогою CASE-засобів, що підтримують дану модель, та, по-друге, також при розробці відповідних CASE-засобів.

Результати роботи були впроваджені у навчальний процес за спеціальністю „Інформатика” на факультеті кібернетики КНУ (нормативний курс „Прикладна логіка”, магістри; спеціальний курс „Вступ до реляційних баз даних”, магістри, заочне відділення; нормативний курс „Композиційна семантика SQL-подібних мов”, спеціалісти, 3 курс).

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи отримані здобувачем самостійно. Роботи [3-5, 7-11, 50, 51] написані у співавторстві з науковим керівником, якому належить постановка задачі дослідження, вибір методів дослідження (зокрема, застосування методів загальної теорії решіток) та обговорення результатів. Здобувачем у публікаціях [5, 8, 10, 50, 51] сформульовані леми та теорема і проведено відповідні доведення, у публікаціях [3, 4, 7] уточнені вимоги коректності побудови моделі по слабким типам зв'язків та коректності ієрархії типів моделі, у роботі [11] розглянуті типи сутностей та зв'язків на равні атрибутів і доменів та подані відповідні уточнення, у роботі [9] по анології з бінарними типами зв'язків уточнені обмеження кардинальності для багатосторонніх типів зв'язків.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та висновки дисертаційного дослідження обговорювалися на наукових семінарах кафедри теорії та технології програмування КНУ та Інституту програмних систем НАН України.

Результати дисертаційного дослідження оприлюднені у доповідях і повідомленнях на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, семінарах; зокрема, на VII міжнародній конференції „Electronic Computers and Informatics'2006" (ECI'2006, Kosice-Herlany, Slovakia, 2006 р.), IX міжнародній конференції „Интеллектуальные системы и компьютерные науки" (Московський державний університет ім. М.В. Ломоносова, Москва, Росія, 2006 р.), XII, XIII і XIV міжнародних конференціях „Knowledge-Dialogue-Solution" (KDS 2006, KDS 2007 KDS 2008; Varna, Bulgaria, 2006 р., 2007 р. і 2008 р.), міжнародній конференції „Dynamical System Modeling and Stability Investigation" (DSMSI-2007, Київ, Україна, 2007 р.), IV та V міжнародних конференціях „Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development" (TAAPSD'2007, TAAPSD'2008; Бердянськ, Україна, 2007 р.; Київ, Чернігів, Україна, 2008), XV всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (Львів, Україна, 2008 р.) [3, 4, 5, 9, 10, 11, 35, 37, 50].

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 11 статтях в наукових журналах і збірниках наукових праць [3, 4, 5, 7, 8, 10, 33, 34, 36, 50, 51], 4 тезах конференцій [9, 11, 35, 37]; з них 5 статей опубліковані у фахових виданнях, затверджених ВАК України.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів (16 підрозділів), висновків, списку використаних джерел (125 найменувань на 14 с.) і додатків (32 с., огляд конструктивних елементів діаграм „сутність-зв'язок" в різних нотаціях та доведення теореми 3.1 про сумісність значень операторів **min, max**) Загальний обсяг дисертації становить 173 с., основний зміст викладено на 120 с. Праця містить 29 рисунків та 14 таблиць.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД МОДЕЛІ „СУТНІСТЬ-ЗВ'ЯЗОК”

Мета розділу полягає у розкритті призначення та принципів побудови моделі „сутність-зв'язок”. Особлива увага при розгляді моделі приділяється розкриттю проблем стандартизації моделі „сутність-зв'язок”, ґрунтуючись на її формальних основах (згідно формального означення поняття „модель даних” даного Коддом [71]).

Об'єкт дослідження – поняття моделі „сутність-зв'язок”. Основна проблематика полягає в уточненні понять моделі та дослідженні їх властивостей. При уточненні базових елементів моделі „сутність-зв'язок” використовується теоретико-множинна платформа.

Основні результати розділу: загальний огляд моделі „сутність-зв'язок” в її еволюції, в тому числі, огляд програмних засобів, які її підтримують; розкриття проблеми стандартизації моделі; огляд діаграм „сутність-зв'язок”; огляд базових елементів моделі та їх формалізація.

Основні результати розділу опубліковані в [5, 8, 10, 11, 34], апробовані на конференціях [5, 10, 11].

1.1. Проблема стандартизації моделі „сутність-зв'язок”

Модель „сутність-зв'язок” – це модель даних, яка використовується при проектуванні різноманітних моделей (інформаційних систем, баз даних, архітектур комп'ютерних додатків та інших систем) і являється високорівневою концептуальною моделлю. Дана модель ґрунтується на деякій важливій семантичній інформації про реальний світ. Вона представляє графічну нотацію, за допомогою якої можна описувати об'єкти логічних моделей даних та відношення між об'єктами. В даному контексті модель „сутність-зв'язок” є метамоделлю даних, тобто засобом специфікації логічних моделей даних, які будуються на основі вихідної концептуальної моделі даних.

Модель „сутність-зв'язок" використовують при концептуальному моделюванні для отримання концептуальної моделі, яку потім транслюють в логічні моделі, зазвичай, в реляційні або об'єктно-орієнтовані [14, 67].

Модель „сутність-зв'язок" запропонував Пітер Чен (Chen) з метою впорядкування задачі проектування моделей, і її проект був опублікований у 1976 р. [67]. Дана модель задовольняє двом важливим умовам:

– потужність її засобів дозволяє досить адекватно формалізувати структуру різноманітних предметних областей;

– розрив між можливостями моделі і *CASE-засобів* (*Computer Aided Software Engineering*[1]), що її підтримують, не є надто великим.

На сьогоднішній день не існує єдиного загальноприйнятого стандарту для моделі „сутність-зв'язок", але є набір загальних конструкцій, які лежать в основі більшості варіантів моделі. Дана ситуація виникла через те, що різні автори пропонують свої елементи моделі та відповідну термінологію і не має єдиного стандарту, а є групи користувачів (прихильників), які застосовують той чи інший варіант даної моделі.

Ситуація на російсько- та україномовному інформаційному просторі додатково ускладнюється неякісним перекладом навчальної та наукової літератури. Так, у різних джерелах (див., наприклад, [14, 20, 21]) для одного і того самого поняття використовують різні терміни, які часто не відповідають їх змісту.

У таблиці 1 наведено варіанти назв ключових понять, що зустрічаються в доступній російськомовній літературі [14, 18, 20, 22]; термінологія, що використовується в поясненнях, слідує оригінальним сучасним роботам Тхелхеіма (Thalheim) [116], Елмасрі (Elmasri) і Наватхе (Navathe) [77].

---

[1] Тобто програмні засоби, які підтримують процеси створення та супроводу моделей, зокрема: (1) аналізу і проектування моделей, (2) генерації коду, (3) тестування, (4) документування та (5) управління проектом.

Таблиця 1.1

Ключові поняття моделі „сутність-зв’язок” та їхні назви

Поняття (змістовне пояснення)	1 варіант	2 варіант	3 варіант	4 варіант	5 варіант
Тип сутності (***entity type*** – *складається, містить, породжує свої екземпляри*)	Тип сутності	Множина сутності	Тип сутності	Клас сутності	Тип сутності
Екземпляр сутності (***entity occurrence*** – *належить своєму типу сутності, породжується своїм типом сутності*)	Екземпляр сутності	Екземпляр сутності	Сутність	Екземпляр сутності	Сутність
Множина сутності (***entity set*** – *конкретний набір екземплярів типу сутності в деякий момент часу*)	–	–	–	–	Множина сутності
Атрибут (***attribute***)	Властивість	Атрибут	Атрибут	Атрибут	Атрибут
Тип зв’язку (***relationship type*** – *складається, містить, породжує свої екземпляри*)	Тип зв’язку	Зв’язок	Тип зв’язку	Клас зв’язку	Тип зв’язку
Екземпляр зв’язку (***relationship occurrence*** – *належить своєму типу зв’язку, породжується своїм типом зв’язку*)	Екземпляр зв’язку	Екземпляр зв’язку	Зв’язок	Екземпляр зв’язку	Зв’язок
Множина зв’язку (***relationship set*** – *конкретний набір екземплярів типу зв’язку в деякий момент часу*)	–	–	–	–	Множина зв’язку
Джерело	[18, част. III, гл. 14]	[14, гл. 2]	[21, част. II, гл. 5]	[22, част. II, гл. 3]	[77, 116]

В роботі буде використовуватися оригінальна термінологія Тхелхеіма, Елмасрі та Наватхе – 5 варіант з вищенаведеної таблиці.

Не дивлячись на те, що модель „сутність-зв'язок" є високорівневим представленням, вона не дає однозначного рішення для визначення проектантом своїх вимог до об'єктів моделі. Так, не завжди можна очевидно визначити, до якого елементу моделі можна віднести певний об'єкт (до типу сутності, типу зв'язку або атрибуту). Аналіз предметної області та побудова її моделі є суб'єктивним процесом, тому проектанти можуть створювати різні, але досить допустимі інтерпретації одного і того ж факту. Вибір варіанту в значній степені залежить від проектанта. Слід зауважити, що атрибут реалізувати значно простіше ніж тип сутності або тип зв'язку.

Відсутня абсолютна різниця між типами сутностей, типами зв'язків та атрибутами. Наприклад, атрибут є таким тільки тоді, коли пов'язаний з деяким типом сутності або типом зв'язку, в іншому контексті атрибут може виступати як самостійний тип сутності.

Дана неоднозначність, зокрема, суттєво ускладнює роботу під час злиття локальних моделей в єдину глобальну модель (див., наприклад, [20, 21, 39, 40], в яких вказані методи злиття локальних моделей (ідентичність, агрегація, узагальнення) та шляхи виходу з різних неоднозначностей, що виникають під час злиття).

Аналізуючи питання побудови (проектування) моделі, Голстейн (Goldstein) і Сторей (Storey) вказують на те, що поняття моделі „сутність-зв'язок" не такі вже й легкі для розуміння і застосування початківцями (людьми, які не є професіоналами у сфері проектування, або тими, що тільки починають вчитися проектувати) [85]. Дану працю корисно опрацювати для того, щоб ознайомитися з типами невідповідностей між проектом (певною предметною областю) та його концептуальною моделлю, наприклад:

– пропущені елементи проекту у моделі;
– у моделі присутні елементи, які не мають аналогів у проекті;

– використання менш „підходящих” понять моделі „сутність-зв’язок” для відображення елементів проекту (часто ця невідповідність носить суб’єктивний характер, про що зазначалось вище).

У роботі [85] проводиться аналіз різних типів невідповідностей та вказуються шляхи їх виправлення.

З вищевикладеного видно, що при використанні моделі „сутність-зв’язок” існує ряд принципових проблем, які спричиняються відсутністю єдиного загальноприйнятого стандарту моделі з відповідним формальним підґрунтям.

1.2. Уточнення моделі „сутність-зв’язок”

Розглядаючи модель „сутність-зв’язок”, будемо спиратися на формальне означення поняття „модель даних”, дане Коддом [71]. Так, модель даних визначається як сукупність колекції типів (де тип – це множина значень), колекції операцій над екземплярами цих типів і колекції застосовуваних до типів та операцій обмежень цілісності.[1]

Будь-яка розвинена модель (даних) включає в себе три компонента:

– опис структури даних (структурна частина);

– опис обмежень цілісності;

– опис операцій над даними (маніпуляційна частина).

Необхідно зазначити, що модель „сутність-зв’язок” не є формальною моделлю, або є такою не в першу чергу. Фактично вона складається з набору переважно неформальних концепцій, але в ній присутні і формальні аспекти.

Пітер Чен, основоположник моделі „сутність-зв’язок”, у своїй роботі [62] наголошує, що модель заснована на серйозних математичних засадах: на поняттях теорії множин, теорії відношень, логіки, теорії решіток.

Розглядати модель та її уточнення доцільно в декілька етапів:

– розгляд та уточнення структури даних (сутності, типу сутності, слабкого типу сутності, сильного типу сутності, типу сутності підклас, типу сутності

[1] Зауважимо, що зараз під колекцією (collection) розуміється множина, або мультимножина, або послідовність.

суперклас; зв’язку, типу зв’язку, слабкого типу зв’язку, сильного типу зв’язку; типу зв’язку суперклас/підклас, типу зв’язку isa; ролей, атрибутів і т.і.);

– розгляд та уточнення обмежень цілісності (обмеження кардинальності типів зв’язку, обмеження кардинальності атрибутів, обмежень на значення атрибутів, ключів і т.і.);

– розгляд та уточнення операцій над даними (операцій вибірки, теоретико-множинних операцій, операцій дій над даними і т.і.).

При розгляді уточнень структури даних і обмежень цілісності моделі „сутність-зв’язок” доцільно розглянути праці Чена [57, 58, 62, 66, 67, 68], Тхелхеіма [116], Елмасрі та Наватхе [77], Хартмана (Hartmann) [89], Ферга (Ferg) [83], Цаленка [42, 43]. У даній роботі будуть розглянуті існуючі уточнення понять структури даних та обмежень цілісності моделі, а також запропоновані нові уточнення.

В літературі уточнення моделі „сутність-зв’язок” здійснюють на основі математичних понять (теорії множин, теорії решіток, теорії графів). Деякі автори при уточненні моделі використовують поняття теорії реляційних баз даних.

В подальших розділах уточнення понять моделі будуть проводитися на теоретико-множинній основі.

Розглядаючи уточнення операцій над даними, зазначимо, що саме Чен зробив перші кроки по їх опису в роботах [57, 67].

Так, у роботі [67] були описані правила виконання, по-перше, операцій дій над даними (добавлення сутності в тип сутності, добавлення зв’язку в тип зв’язку, добавлення значення атрибуту сутності або зв’язку, модифікація значення атрибуту сутності або зв’язку, знищення сутності або зв’язку) та, по-друге, операцій вибірки атрибутів, сутностей та зв’язків.

Робота [96] є першою спробою модифікації реляційної алгебри для моделі „сутність-зв’язок”.

В роботі [57] розглядається алгебра для моделі „сутність-зв'язок" (*algebra for a directional binary entity-relationship model*). Дана алгебра побудована для так званої направленої бінарної моделі, яка не підтримує атрибути на типах зв'язків та бінарні типи зв'язків „багато-до-багатьох". Ця алгебра є багатосортною алгеброю і в роботі висвітлена описово, тобто відсутній синтаксис та чітка семантика. Носіями (сортами) є типи сутностей, типи зв'язків та атрибути; сигнатура алгебри містить 11 операцій.

Відомо, що не має єдиної загальноприйнятої алгебри і числення для моделі „сутність-зв'язок", які існують, наприклад, для реляційної моделі.

При побудові алгебр моделі „сутність-зв'язок" існують різні підходи та відповідні класи алгебр, наприклад:

– багатосортні алгебри (наприклад, алгебра для бінарної направленої моделі „сутність-зв'язок" [57], як було відмічено вище);

– алгебри в класичному розумінні (наприклад, алгебра для так званої комплексної (complex) моделі „сутність-зв'язок" [100, 101, 108]);

– модифікації реляційної алгебри (наприклад, [75, 86, 96]).

Поряд з алгебрами моделі „сутність-зв'язок" існують також числення цієї моделі, які, звісно, будуються на основі відповідних алгебр; наприклад, є числення комплексної моделі „сутність-зв'язок" [102], реляційне числення моделі „сутність-зв'язок" [73, 74, 84].

Модель даних втрачає свою користь, якщо вона не супроводжується мовою маніпулювання даними, яка підтримує всі концепції моделі. В основу мови маніпулювання даними моделі даних може бути покладена алгебра або числення даної моделі. Існують також мови, в основі яких лежить як алгебра так і числення.

В літературі висвітлено різні мови маніпулювання даними моделі „сутність-зв'язок", кожна з яких підтримує деякий вид моделі.

Серед мов маніпулювання даними моделі „сутність-зв'язок" виділяють наступні види:

– природні мови маніпулювання даними (наприклад, GORDAS [78], ERROL [97] і DESPATH [104]);

– графічні мови маніпулювання даними (наприклад, HIQUEL [118] та мови, запропоновані Елмасрі та Ларсеном (Larsen) [76], Мендельсоном (Mendelzon) та Зхангом (Zhang) [125]).

Розглядаючи мови маніпулювання даними моделі „сутність-зв'язок", зазначимо, що багато таких мов не має чіткої семантичної основи, тобто відповідної алгебри (зокрема, числення). В даних мовах не використовується повний спектр операцій над даними, зокрема агрегатні функції.

Формальна семантика є необхідною умовою стандартизації мови маніпулювання даними і тільки вона дає можливість трансляції концептуальних моделей (предметних областей) у логічні моделі (та запити мов маніпулювання даними концептуальних моделей в запити відповідних логічних моделей).

Існують мови, які мають чітку формальну семантику. Серед таких мов виділяють високорівневу мову NETUL [110, 111] та SQL-подібну мову SQL/EER [84].

Семантичними основами для мови NETUL є формальні структури даних подібні мережам. Ключовою ідеєю визначення семантики мови SQL/EER є відображення SQL/EER-запитів в еквівалентні запити формального числення кортежів [84]. Дані мови підтримують агрегатні функції.

Як зазначалось вище, на сьогоднішній день не існує єдиного загальноприйнятого стандарту для моделі „сутність-зв'язок". Аналогічна ситуація спостерігається з алгеброю, численням та мовою маніпулювання даними цієї моделі.

1.3. Базові елементи моделі

Базовими елементами моделі „сутність-зв'язок" є *сутності*, *атрибути* і *зв'язки*. У цьому підрозділі розглядаються та уточнюються дані елементи.

З об'єктами моделі „сутність-зв'язок" пов'язані поняття: *тип* – набір однорідних предметів, явищ, що виступають як єдине ціле; *екземпляр* –

конкретний елемент набору, який (набір) визначає деякий тип; *множина* – конкретний набір екземплярів типу в деякий момент часу.

Очевидно, що ототожнення понять тип та множина є суттєвою помилкою, особливо під час розгляду моделей, які пов'язані з часовими аспектами. При розгляді сутностей та зв'язків необхідно розрізняти, з одного боку, поняття сутності (екземпляру сутності), типу сутності і множини сутності та, з другого боку, поняття зв'язку (екземпляру зв'язку), типу зв'язку і множини зв'язку.

1.3.1. Поняття сутності

Сутність – це об'єкт визначеного виду. *Тип сутності* визначає набір однорідних сутностей деякого виду. Множина всіх сутностей типу сутності в деякий момент часу називається *множиною сутності*.

Наприклад, тип сутності Місто, екземпляр сутності – Київ, множина сутності – міста, які існують в даний час в базі даних Населені пункти України.

Тип сутності може бути об'єктом з фізичним (реальним) існуванням або об'єктом з концептуальним (абстрактним) існуванням.

Наприклад, робітники, об'єкти нерухомості, деталі виробів – це типи сутностей, які відповідають об'єктам з фізичним існуванням, а огляд об'єктів нерухомості, продаж об'єктів нерухомості, робітничий стаж – це типи сутностей, які відповідають об'єктам з концептуальним існування.

Кожен тип сутності в моделі описується іменем (унікальним у межах моделі) та своїми характеристиками (атрибутами). Тип сутності може бути пов'язаний з іншими типами сутностей за допомогою типів зв'язків, причому кількість відповідних типів зв'язків не обмежена (атрибути та типи зв'язків типів сутностей розглядаються далі).

Множина сутності зазвичай має теж ім'я, що і тип сутності.

Уточнення понять тип сутності та сутність будемо проводити на теоретико-множинній основі: тип сутності інтерпретується як множина, а сутність – як елемент цієї множини.

При уточненні типів сутностей деякі автори розглядають множини, які задаються відповідними предикатами (наприклад, Чен [62, 68], Елмасрі та Наватхе [77]). Також тип сутності можна розглядати на рівні атрибутів і доменів, відповідні уточнення подані далі.

Для того, щоб розрізняти тип сутності від множини, яка його інтерпретує, в роботі тип сутності позначається звичайними літерами, а відповідна множина – жирними літерами; наприклад, тип сутності E інтерпретується як множина $\mathbf{E}$.

1.3.2. Поняття зв'язку

Взаємовідношення сутностей виражається зв'язками. *Тип зв'язку* – це осмислена асоціація між типами сутностей (зокрема, дана асоціація може бути задана на одному типі сутності). *Зв'язок* – це асоціація між сутностями, які належать відповідним типам сутностей, що приймають участь у даному типі зв'язку. *Множина зв'язку* – це множина всіх зв'язків типу зв'язку в деякий момент часу.

Охвачені зв'язком сутності називаються *учасниками* даного зв'язку. Число учасників зв'язку, називається *степенем зв'язку* (*relationship degree*) або *арністю* зв'язку. Арність всіх зв'язків одного типу зв'язку однакова; таким чином, арність є характеристикою типу зв'язку. Тут повна аналогія с арністю логіко-математичних відношень та кількістю компонент кортежів, що формують ці відношення.

В залежності від степеня зв'язку розрізняють наступні види зв'язків:

– *бінарні зв'язки* (*binary relationships*);

– *багатосторонні зв'язки* (*multiway relationships*).

Бінарний зв'язок в загальному випадку здатний з'єднати будь-яку сутність одного типу сутності з будь-якою сутністю іншого типу сутності, зокрема, з будь-якою сутністю того самого типу сутності.

Багатосторонній зв'язок охоплює більше двох типів сутностей або один тип сутності, в якому сутності приймають участь декілька раз у різних ролях.

Зрозуміло, що кількість різних типів сутностей, що формують зв’язок, не більша ніж арність зв’язку.

Тип зв’язку можна уточнити за допомогою відношення, а зв’язок за допомогою кортежу відношення; дані уточнення можна знайти, наприклад, в роботах [67, 77].

Так, тип зв’язку R, заданий на типах сутностей $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_\mathrm{n}$, інтерпретується як n-арне відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_\mathrm{n}$, причому $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times ... \times \mathbf{E}_\mathrm{n}$ (зауважимо, що порядок множин у декартовому добутку суттєвий[1]).

При цьому типи сутностей $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_\mathrm{n}$ необов’язково різні, з огляду на різні ролі, які можуть відігравати деякі типи сутностей у типі зв’язку, тому і множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_\mathrm{n}$ необов’язково різні.

Семантичне значення входження типу сутності у тип зв’язку називається її *роллю*. Входженням типів сутностей у тип зв’язку можна надавати *рольові імена* – для уточнення призначення кожного входження (більш неформально: для уточнення призначення кожної сутності-учасниці у зв’язку).

Тут треба говорити саме про входження, тому що n-арний тип зв’язку, де $\mathrm{n} =$ 2, 3, ..., задається на n необов’язково різних типах сутностей.

Особливе значення мають рольові імена в типах зв’язків на одному типі сутності. В цьому випадку нема інших засобів крім рольових імен для розрізнення різних входжень одного типу сутності в тип зв’язку.

Отже, зміст рольових імен полягає в синтаксичному розрізненні входжень одного і того ж типу сутності в тип зв’язку.

Серйозно говорити про семантичний аспект рольових імен, тобто про визначення функцій учасників зв’язку рольовими іменами, не приходиться,

---

[1] На типах сутностей ніякого порядку нема, а в декартовому добутку порядок множин, що інтерпретують типи сутностей, суттєвий. Отже, стаючи на теоретико-множинну платформу для уточнення, треба насильно вводити іррелевантну інформацію. Слід зауважити, що результати насправді не залежать від порядку на типах сутностей.

оскільки вся „семантика” полягає в виборі „мнемонічних” рольових імен (які і повинні відображати семантику).

Можна сказати, що поняття ролі часто допоміжне, воно існує для зручності користувача; тому ролі (рольові імена) можна навіть не вводити, особливо в випадку, коли явне введення цих імен нічого не додає до розуміння моделі.

Рольові імена, які позначимо через $v_1, v_2, \ldots$, дають можливість уточнити тип зв’язку (з мінімальною інтерпретацією).

Типом зв’язку арності n між типами сутностей (який з’єднує типи сутностей) $E_1,\ldots,E_k$, де $k \le n$, і типи сутностей $E_1,\ldots,E_k$ попарно різні, назвемо сюр’єктивне відображення вигляду $R:\{v_1,\ldots,v_n\} \to \{E_1,\ldots,E_k\}$, де рольові імена $v_1,\ldots,v_n$ попарно різні (сюр’єктивність забезпечує існування хоча б одного рольового імені для кожного типу сутності).

Рольові імена дають можливість зробити наступний крок в уточненні типу зв’язку, інтерпретуючи його не як відношення [67], а як таблицю [32], схема якої співпадає з множиною рольових імен типу зв’язку (зауважимо, що при цьому підході ніякий порядок на типах сутностей не вводиться).

Тип зв’язку, в якому деякий тип сутності приймає участь декілька раз у різних ролях, іноді називають рекурсивним [20, част. II, гл. 5, с. 192]; таке використання в даному контексті дуже невдале, оскільки, як зазначалося вище, мова йде просто про різну семантичну роль різних входжень однієї сутності в зв’язок (так само, як можуть співпадати компоненти кортежів); крім того, термін „рекурсивний” дуже перевантажений (наприклад, теорія рекурсії, рекурсивні виклики функцій і т.і.).

Моделі „сутність-зв’язок” під силу відображати багатосторонні типи зв’язків, але існують логічні моделі, які не підтримують їх; тому є процедура переходу від багатостороннього типу зв’язку до бінарних типів зв’язків – *декомпозиція*. Теоретичні і практичні основи декомпозиції можна знайти у роботах [14, 69, 92]; зауважимо тільки, що існує два шляхи *декомпозиції без* *втрат*[1]: 1) декомпозиція n-арного типу зв'язку на n бінарних типів зв'язків; 2) декомпозиція n-арного типу зв'язку в *з'єднуючий тип сутності* (*connecting entity type*) та n бінарних типів зв'язків. В моделі „сутність-зв'язок" застосовують саме другий шлях декомпозиції типів зв'язку.

1.3.3. Поняття атрибуту

Засіб, за допомогою якого визначаються властивості типу сутності або типу зв'язку, є *атрибут*. Типу сутності та типу зв'язку відповідає певний набір атрибутів. Тип сутності може характеризуватися принаймні одним атрибутом, а тип зв'язку може і не мати атрибутів.

Має місце поняття множини значень, які може приймати атрибут – *домен атрибуту* (*domain*). Домен визначає всі потенціальні значення, що можуть бути присвоєні атрибуту.

Зрозуміло, що різні атрибути можуть використовувати один домен.

Як зазначалось вище, можна розміщувати атрибути на типі зв'язку, але не потрібно зловживати такою можливістю; в якості альтернативи використовують наступне: вводять в модель новий тип сутності з тими ж атрибутами та з'єднують його з типом зв'язку (знищуючи його атрибути), отримуючи новий тип зв'язку, який має арність на одиницю більше, (див., наприклад, [14]).

Сутності та зв'язки характеризуються значеннями своїх атрибутів. Розглядаючи типи сутностей та типи зв'язків на рівні атрибутів і доменів, вони уточнюються наступним чином.

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ атрибути типу сутності E або типу зв'язку R, а D – універсальний домен (для спрощення позначень розглядається один домен для всіх атрибутів).

[1] При декомпозиції нас цікавить її особливий вид – декомпозиція без втрат, тобто це така декомпозиція після якої можливо отримати вихідний тип зв'язку з типів зв'язків, отриманих внаслідок даної декомпозиції, без втрати інформації.

Типом сутності E називається множина відображень вигляду $e:\{A_1, A_2, ..., A_n\} \to D$, де e – це сутність типу сутності E.

Типом зв'язку R називається множина відображень вигляду $r:\{A_1, A_2, ..., A_m\} \to D$, причому множина атрибутів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ містить атрибути типу зв'язку R та атрибути всіх сутностей-учасниць даного типу зв'язку, де r – це зв'язок типу зв'язку R [67][1].

Розрізняють різні класи атрибутів: *прості* (*simple*) та *складові* (*composite*) *атрибути* (*attributes*), *однозначні* (*single-valued*) та *багатозначні* (*multivalued*) *атрибути*, *базові* (*stored*) та *похідні* (*derived*) *атрибути*, *ключі* (*keys*).

Простий атрибут – атрибут, який складається з одного компонента з незалежним існуванням. Складовий атрибут – атрибут, який складається з декількох компонентів, кожен з яких характеризується незалежним існуванням.

Прості атрибути іноді називають *атомарними*. Складовий атрибут представляє деяку композицію простих (або складових) атрибутів. Такі взаємозв'язки вказують на ієрархію атрибутів.

Рішення про моделювання атрибута у вигляді простого чи складового залежить лише від проектанта.

Однозначний атрибут – атрибут, який містить одне значення для будь-якої сутності типу сутності (будь-якого зв'язку типу зв'язку). Багатозначний атрибут – атрибут, який може містити декілька значень для сутності типу сутності (зв'язку типу зв'язку).

В більшості реалізацій моделі „сутність-зв'язок" багатозначний атрибут необхідно знищувати шляхом створення нових слабкого типу сутності та бінарного типу зв'язку виду „один до багатьох" (слабкий тип сутності та бінарний тип зв'язку виду „один до багатьох" розглядаються у наступних розділах).

Похідний атрибут – атрибут, який представляє значення, похідне від значення зв'язаного з ним атрибута або деякої множини атрибутів, які належать

[1] У цій роботі Чен уточнює атрибут як функцію, що відображає тип сутностей (тип зв'язку) в домен.

деякому (не обов'язково даному) типу сутності (типу зв'язку) або множині типів сутностей (типів зв'язків). Базовими атрибутами вважаються атрибути, які не є похідними.

Серед похідних атрибутів потрібно розрізняти атрибути, що використовують значення декількох атрибутів однієї сутності, та атрибути, що використовують значення декількох атрибутів всіх сутностей в межах одного типу сутності. В другому випадку похідний атрибут є атрибутом типу сутності, так як використовує всі значення сутностей цілого типу (ситуація аналогічна використанню агрегатних функцій).

Також похідні атрибути можуть обраховуватися на основі декількох взаємопов'язаних атрибутів різних типів сутностей; при цьому необхідно уточнити типи зв'язків між даними типами сутностей.

Виділяють особливий вид атрибутів – ключі. *Ключ* – атрибут або підмножина атрибутів, яка унікальним чином визначає сутність в складі типу сутності (зв'язок в складі типу зв'язку); іншими словами, дві різні сутності (два різних зв'язка) у межах типу сутності (типу зв'язку) не можуть мати однакові значення всіх атрибутів, які складають ключ.

У термінах реляційного підходу ключ K функціонально обумовлює всі атрибути A_i типу сутності (типу зв'язку), які не входять до ключа $(K \to A_i)$ (див., наприклад, [14, с. 108]).

Дане твердження можна уточнити за допомогою поняття обмеження відношення **P** (зокрема, функції) за множиною $\mathbf{X}$ – $\mathbf{P}|\mathbf{X}$ [6].

Множина атрибутів K є ключем, якщо виконується твердження $\forall e_1\ \forall e_2\ (e_1, e_2 \in \mathbf{E} \wedge e_1|\mathbf{K} = e_2|\mathbf{K} \Rightarrow e_1 = e_2)$.

Виділяють наступні види ключів:

– *потенціальний ключ* (*candidate key*) – атрибут або набір атрибутів, які унікально ідентифікують сутності типу сутності (зв'язки типу зв'язку);

– *первинний ключ* (*primary key*) – деякий вибраний потенціальний ключ типу сутності (типу зв'язку) для спрощення роботи з сутностями (зв'язками);

– *альтернативний ключ* (*alternative key*) – потенціальний ключ, який не є первинним ключем.

Зрозуміло, що тип сутності або тип зв'язку має один первинний ключ, а потенціальних ключів може бути декілька.

Для отримання додаткової інформації про об'єкти моделі на них накладаються обмеження. Одне з обмежень, яке застосовують до атрибутів типу сутності (типу зв'язку), це визначення ключа.

Інше обмеження – це *обмеження домену* (*domain constraint*), яке наголошує, що значення атрибуту повинно вибиратися з конкретного домену (або, наприклад, належати визначеному діапазону).

На атрибути може накладатися також *обмеження кардинальності* (*cardinality constraints*), яке відображає найменшу та найбільшу можливу кількість значень атрибуту для сутності (зв'язку) і задається у вигляді відповідного діапазону.

Наприклад, атрибут Телефон типу сутності Відділення компанії може мати від одного до трьох значень, тобто будь-яке відділення компанії має не менше одного номера телефону і не більше трьох номерів.

1.4. Діаграма „сутність-зв'язок”

Концептуальна модель даних, спроектована засобами моделі „сутність-зв'язок”, складається з документації до моделі, в якій відображені основні об'єкти та їх властивостей, і її схеми (графічного зображення).

Схема моделі – це графічне представлення сукупності типів сутностей з визначеною для кожного з них скінченною непорожньою множиною атрибутів і сукупності типів зв'язків, для кожного з яких визначена скінченна (можливо, порожня) множина атрибутів.

Дану схему ще називають *діаграмою „сутність-зв'язок”* (*entity-relationship diagram*) або *ER-діаграмою* (*ER-diagram*). Діаграма „сутність-зв'язок” стандартизована, але не надто жорстко; існують різні системи позначень (нотації).

Діаграма „сутність-зв'язок" була запропонована у роботі [67] і система позначень цієї роботи отримала назву нотації Чена. На сьогоднішній день найбільш розповсюджені наступні нотації: нотація Чена [67], нотація Баркера (Barker) [47], нотація Мартіна („воронья лапка") [21], нотація IDEF1X [29, 90], система позначень UML [12]. У додатку А розглянуто конструктивні елементи діаграми „сутність-зв'язок" в різних нотаціях.

Всі нотації діаграми „сутність-зв'язок" мають за основу одну ідею – малюнок завжди наочніше текстового опису. Усі такі діаграми використовують графічні зображення елементів моделі „сутність-зв'язок". З появою нових елементів моделі з'являються також їх графічні аналоги. Не всі поняття моделі „сутність-зв'язок" зображаються на діаграмі „сутність-зв'язок", деякі заносяться лише у документацію. Зручність використання діаграми також полягає у тому, що текстове наповнення можна робити будь-якою зрозумілою користувачам мовою. Також діаграми дозволяють вносити додаткову інформацію у вигляді звичайних текстових написів.

Модель даних, яка відповідає визначеній діаграмі „сутність-зв'язок" і містить конкретний набір даних, прийнято називати *екземпляром моделі*. Кожному типу сутності (типу зв'язку) в екземплярі моделі відповідає деяка множина сутностей (зв'язків), а кожна з сутностей (зв'язків) має деяке значення кожного атрибуту.

1.5. Еволюція моделі „сутність-зв'язок"

Модель „сутність-зв'язок" постійно розширюється і модифікується її прихильниками. У зв'язку з наглядністю представлення концептуальних схем модель увійшла до складу багатьох CASE-засобів, які також внесли свій вклад в її еволюцію.

Детальний огляд історії виникнення та розвитку моделі можна знайти, наприклад, у роботах Чена [60, 64, 62, 63, 65] та Тхелхеіма [116]. За даними досліджень працівників німецького Університету Отто-фон-Гуріке (Otto-von-

Guericke University of Magdeburg) [82] на початок 2005 року налічувалось біля 100 модифікацій моделі „сутність-зв'язок".

Модель „сутність-зв'язок" у своїй еволюції пройшла декілька етапів, серед них виділяють наступні:

– модель „сутність-зв'язок" (entity-relationship model);

– *розширена модель „сутність-зв'язок"* (*extended entity-relationship model* або *EER model*);

– *модель „сутність-зв'язок" в квадраті* (*entity-relationship model squared* або *E^2R model*);

– *часова модель „сутність-зв'язок"* (*temporal entity-relationship model* або *timeER model*);

– *модель „сутність-зв'язок" високого порядку* (*higher-order entity-relationship model* або *HERM*).

Далі подається стисла характеристика даних етапів та моделей.

В різних джерелах можна зустріти різні види моделі „сутність-зв'язок", які виникали у зв'язку з потребами моделювання. Чен у роботі [56] запропонував класифікацію моделей „сутність-зв'язок", базуючись на обмеженнях, що накладаються на зв'язки та атрибути.

Обмеження, які накладаються на типи зв'язків, породжують два види моделей – *узагальнену модель „сутність-зв'язок"* (*generalized entity-relationship model*) та *бінарну модель „сутність-зв'язок"* (*binary entity-relationship model*). Узагальнена модель підтримує багатосторонні типи зв'язків, а бінарна модель – лише бінарні типи зв'язків.

Обмеження, які накладаються на атрибути, породжують види моделей в яких: по-перше, типи сутностей і типи зв'язків мають атрибути; по-друге, тільки типи сутностей мають атрибути; нарешті, по-третє, взагалі немає атрибутів.

Суттєвий результат даної роботи у тому, що Чен продемонстрував еквівалентність між моделями різних видів: модель одного виду може бути представлена моделлю іншого виду; на прикладах були показані дані трансляції різних видів моделей „сутність-зв'язок".

Розширена модель „сутність-зв'язок" з'являється у 1980-х роках у результаті введення в модель категорії абстракції [79, 98]. Причиною стало швидке розповсюдження нових типів додатків баз даних (мультимедійні додатки, інструменти автоматизованої підготовки виробництва, інструменти автоматизованого проектування), і для того, щоб створювати моделі даних для цих баз даних, стало недостатньо понять моделі „сутність-зв'язок". Розширена модель „сутність-зв'язок" має засоби для безпосередньої підтримки об'єктно-орієнтованих концепцій. Дана модель включає всі поняття моделі „сутність-зв'язок" та власні поняття (більш детально ця модель розглядається у четвертому розділі).

Модель „сутність-зв'язок" та розширена модель „сутність-зв'язок" мають деякі обмеження та проблеми при застосуванні, наприклад:

– типи сутностей та атрибути повинні бути чітко розрізнені у моделі, хоча, як відомо при проектуванні, вибір представлення інформації у вигляді типу сутності чи атрибуту залежить від проектанта (тобто носить суб'єктивний характер);

– у випадку подальшої трансформації моделі у реляційну модель виникає потреба нормалізації отриманої реляційної моделі.

Для того, щоб не виникали ці проблеми, Емблі (Embley), Лінг (Ling) та Ванг (Wang) запропонували у роботі [80] покращену розширену модель „сутність-зв'язок" – модель „сутність-зв'язок" у квадраті. Дана модель окрім понять моделі „сутність-зв'язок" включає *лексичні типи сутностей* (*lexical entity type*), в ній не потрібно розрізняти при моделюванні атрибути та типи сутностей, нарешті, модель безпосередньо підтримує нормалізацію (на своєму рівні).

Широкий діапазон відомих моделей керують інформацією, яка змінюється у часі (наприклад, *темпоральна реляційна модель* [72], *бітемпоральна* *концептуальна модель даних* [91]). Тому багато моделей фокусуються не тільки на структурному аспекті інформації, а й на поведінковому аспекті. Дані вимоги до відображення інформації стали причиною появи часової моделі „сутність-зв’язок”, яка є надбудовою розширеної моделі „сутність-зв’язок” за визначенням Елмасрі та Наватхе [77]. Часова модель „сутність-зв’язок” забезпечує вбудовану підтримку для збору *часових аспектів* сутностей, зв’язків, атрибутів, сутностей суперклас, сутностей підклас.

У 1992 році Тхелхеім запропонував модель „сутність-зв’язок” високого порядку як точно засновану на теорії [114]. Схему даної моделі можна автоматично транслювати в схеми класичних моделей даних (реляційну, ієрархічну та мережеву). Модель „сутність-зв’язок” високого порядку містить всі концепції попередніх моделей та власні, а саме *типи зв’язків високого порядку* (*higher-order relationship types*), *оператори* (наприклад, *insert*, *delete*, *update*, *conditional operations*) та *обмеження цілісності узагальненої складності* (*integrity constraints the generalized complexity*). В даній моделі використовуються абстрактні типи даних і вона базується на об’єктно-орієнтовному моделюванні.

У зв’язку з активними дослідженнями в області концептуального моделювання у 1979 році було організовано першу міжнародну конференцію „Підхід сутність-зв’язок” (International Conference on the Entity Relationship Approach), яка відбулась в США у Лос Анжелесі. З 1996 року вона проходе під назвою „Концептуальне моделювання” (International Conference on Conceptual Modeling).

Дана конференція в період з 1979 по 1985 роки проходила раз в два роки, а з 1986 року стала щорічною. На сьогоднішній день відбулось 26 міжнародних конференцій, які приймали 15 різних держав на 3 континентах. Наступна конференція запланована на листопад 2009 року і відбудеться у Грамаді (Бразилія).

Під час ознайомлення з інформацією, пов'язаною з концептуальним моделюванням, корисно знати тенденції концептуального моделювання та джерела, які потрібують уваги. Ці дані можна знайти, наприклад, на веб-сайтах, що супроводжували відповідні конференцій і почали працювати з 1994 року. Також є веб-сайт моделі „сутність-зв'язок", який містить загальну інформацію: про міжнародні конференції „Концептуальне моделювання", історію розвитку моделі, бібліографію [120]. Нарешті, корисно ознайомитися з оглядовою роботою Чена, Сонга (Song) та Зху (Zhu) [55], що містить аналіз тематичних напрямків та публікацій в концептуальному моделюванні (представлених на міжнародних конференціях „Концептуальне моделювання") з 1979 року по 2005 рік.

1.6. Програмні засоби, які використовують модель „сутність-зв'язок"

Тенденції розвитку сучасних інформаційних технологій приводять до постійного зростання складності моделей (інформаційних систем, баз даних, архітектур комп'ютерних додатків та інших систем), створюваних у різних галузях.

У процесі створення моделей виділяють етапи проектування, розробки, тестування, впровадження та супроводження. При виконанні етапу аналізу і моделювання CASE-засоби забезпечують якість технічних рішень, що приймаються, і підготовку проектної документації. При цьому велику роль відіграють методи візуального представлення інформації, які передбачають побудову діаграм та наскрізну перевірку синтаксичних правил. Графічна орієнтація CASE-засобів заключається у тому, що моделі є схематичними проектами і формами, які простіше використовувати ніж багатосторінкові описи.

Більшість існуючих CASE-засобів засновано на методологіях структурного чи об'єктно-орієнтованого аналізу і проектування, що використовують специфікації у виді діаграм чи текстів для опису зовнішніх вимог, зв'язків між моделями системи, динаміки поводження системи й архітектури програмних засобів.

Основною на етапі аналізу є проблема, пов'язана з взаємодією проектантів моделі з замовником, тому що вони розмовляють „на різних мовах”; ці мови мають надто багато подробиць, які є несуттєвими для іншої сторони. У цьому відношенні неоціненною перевагою CASE-підходу є надання „універсальної” графічної мови різного роду діаграм, що підпорядковані певним нотаціям. Застосування стандартних нотацій забезпечує „читабельність” побудованої моделі, а також можливість переносу частин (чи всього проекту) в інші CASE-засоби. Таким чином, кінцевому користувачу продукту (замовнику) зовсім не обов'язково володіти всіма премудростями розроблювача, за допомогою CASE-підходу і замовник і розроблювач будуть розуміти один одного однозначно.

Для CASE-засобів суттєві 4 наступні типи діаграм:

– SADT (Structured Analysis and Design Technique): моделі і відповідні функціональні діаграми;

– DFD (Data Flow Diagrams): діаграми потоків даних;

– STD (State Transition Diagrams): діаграми переходів станів;

– ERD (Entity-Relationship Diagrams): діаграми „сутність-зв’язок”.

У залежності від спрямованості CASE-продукту він може підтримувати різного роду діаграми. Для цілей інформаційного моделювання, на сьогоднішній день, не існує альтернативи діаграмам „сутність-зв’язок”.

У розряд CASE-засобів попадають як відносно дешеві системи для персональних комп'ютерів з дуже обмеженими можливостями, так і дорогі системи для неоднорідних обчислювальних платформ та операційних середовищ. Так, сучасний ринок програмних засобів нараховує близько 300 різних CASE-засобів, найбільш потужні з яких так чи інакше використовуються практично усіма ведучими світовими фірмами. Крім того, на ринку постійно з’являються нові CASE-засоби та оновлені версії вже існуючих систем.

На сьогоднішній день ринок програмного забезпечення має у своєму розпорядженні наступними найбільш розвинені CASE-засоби [13, 19]:

– *Vantage Team Builder* (*Westmount I-CASE*), призначений для проектування інформаційних систем і систем реального часу; підтримує наступні типи діаграм: діаграму потоків даних, діаграму переходів станів, діаграму „сутність-зв'язок”, структурні карти Константайна [119];

– *Designer*, підтримує структурну методологію проектування моделей, використовує діаграму „сутність-зв'язок”, діаграму функціональної ієрархії, матрицю перехресних посилань та діаграму потоків даних [17, 122];

– *Silverrun*, призначений для аналізу та проектування інформаційних систем бізнес-класу і орієнтований на спіральну модель, використовує функціональні та інформаційні моделі, підтримує діаграму потоків даних, діаграму „сутність-зв'язок” [31, 123];

– *All Fusion Erwin Data Modeler* (*Erwin*), засіб концептуального моделювання баз даних довільної складності на основі діаграм „сутність-зв'язок”; в теперішній час є найбільш популярним засобом моделювання даних завдяки підтримці широкого спектра СУБД різних класів [24, 25, 121];

– *S-Designor*, графічний інструмент для проектування баз даних; реалізує стандартну методологію інформаційного моделювання, при проектуванні використовується дворівневий підхід: концептуальна модель даних (діаграма „сутність-зв'язок”) та фізична модель даних [16];

– *CASE.Аналітик*, засіб функціонального моделювання, який реалізує побудову діаграми потоків даних [19, 53, 54];

– *Rational Rose Data Modeler*, призначено для автоматизації етапів аналізу предметної області та проектування програмного забезпечення, а також для генерації кодів на різних мовах прогрмування та підготовки проектної документації; в основі роботи лежить побудова різного роду діаграм та специфікацій, які визначають логічну та фізичну структури моделі, її статистичні та динамічні аспекти; підтримуються діаграми класів (діаграми

„сутність-зв’язок”), діаграми станів, діаграми сценаріїв, діаграми модулів, діаграми процесів [23].

Під час проектування моделей виділяють стадію концептуального проектування, ціллю якої є побудова концептуальної моделі даних. Найбільш розповсюдженим засобом побудови концептуальної моделі даних є модель „сутність-зв’язок”. При використанні CASE-засобів на даному етапі необхідно зважати на те, що різні види CASE-засобів використовують різні види моделі „сутність-зв’язок” та різні нотації діаграм „сутність-зв’язок”.

В наведеній нижче таблиці наведені вищеописані CASE-засоби та нотації діаграм „сутність-зв’язок”, які вони підтримують.

Таблиця 1.2

CASE-засоби та нотації діаграм „сутність-зв’язок”

Назва Case-засобу	**Виробник**	**Нотації діаграми „сутність-зв’язок”**
Vantage Team Builder (Westmount I-CASE)	CADRE	Нотація Чена
Designer	Oracle	Нотація Баркера
Silverrun	Computer Systems Advisers, Inc. (CSA)	Нотація IDEF1X
All Fusion Erwin Data Modeler (Erwin)	Computer Associates	Нотації IDEF1X та IE (Information Engineering)
S-Designor	Sybase/Powersoft	Нотація IE
Case.Аналитик	Эйтэкс	-
Rational Rose Data Modeler	IBM Rational Software	система позначень UML

Основні результати розділу 1 наступні.

1. На основі огляду моделі „сутність-зв’язок” (зокрема, різних графічних нотацій та CASE-засобів, які підтримують цю модель) уніфіковані поняття її базових елементів (тип сутності, сутність, тип зв’язку, зв’язок).

2. Розкрито проблему стандартизації моделі „сутність-зв'язок", ґрунтуючись на її формальних основах. Відсутність адекватної формалізації моделі „сутність-зв'язок" є причиною відсутності єдиного загальноприйнятого стандарту моделі, що спонукає виникнення труднощів використання моделі.

РОЗДІЛ 2. СИЛЬНІ ТА СЛАБКІ ТИПИ СУТНОСТЕЙ, СИЛЬНІ ТА СЛАБКІ ТИПИ ЗВ'ЯЗКІВ

Мета розділу полягає у дослідженні та формалізації наступних понять моделі „сутність-зв'язок" – сильний тип сутності, слабкий тип сутності, сильний тип зв'язку, слабкий тип зв'язку, які виступають об'єктом дослідження.

Основні результати розділу: огляд різних підходів до понять слабкий та сильний типи сутностей; зображення слабкого типу зв'язку та моделі по слабким типам зв'язків за допомогою орієнтованих графів; уточнення вимог коректності побудови моделі по слабким типам зв'язків в термінах часткового порядку.

Основні результати розділу опубліковані в [3, 7], апробовані на конференції [3].

2.1. Локальний погляд

Іноді сам факт існування сутностей деякого типу сутності залежить від особливого зв'язку даних сутностей з сутностями інших типів сутностей. Тобто можна сказати, що тип зв'язку вводе тип сутності.

Змістовно кажучи, *слабким типом сутності* (*weak entity type*) називають такий тип сутності, існування якого залежить від інших типів сутностей. Тип зв'язку, який з'єднує дані типи сутностей, називається *слабким типом зв'язку* (*weak relationship type*); тобто це такий тип зв'язку, який вводе до розгляду слабкий тип сутності.

Взагалі будь-який тип зв'язку можна використовувати у якості слабкого типу зв'язку [67], але надалі розглядаються (n-арні) слабкі типи зв'язків, які мають такі два обмеження:

– у слабкий тип зв'язку може входити тільки один слабкий тип сутності, який вводиться цим слабким типом зв'язку (і деталізується іншими типами сутностей, які входять у цей слабий тип зв'язку);

– *тор обмеження кардинальності* слабкого типу сутності, який вводиться слабким типом зв'язку, обов'язкове (тобто сутності слабкого типу сутності можуть існувати, тільки знаходячись у зв'язку)[1].

Уточнити перше обмеження можна наступним чином: слабкий тип сутності E вводиться слабким типом зв'язку R (тип зв'язку R, заданий на типах сутностей $E_1,\dots,E_k$, з рольовими іменами $v_1, v_2, \dots$), якщо сюр'єктивне відображення R має вид $R: \{v_1, \dots, v_n\} \to \{E_1, \dots, E_k\}$, де $E \in \{E_1, \dots, E_k\}$, причому $\left|R^{-1}(\{E\})\right| = 1$ (змістовно кажучи, слабкий тип сутності E має в точності одне входження і, отже, в точності одне рольове ім'я).

На рисунках 1 та 2 (в нотації Чена) зображено слабкий тип зв'язку R, який вводить слабкий тип сутності E, але для типу зв'язку на рисунку 1 не виконується перше обмеження, тобто даний тип зв'язку не є слабким типом зв'язку в нашому розумінні.

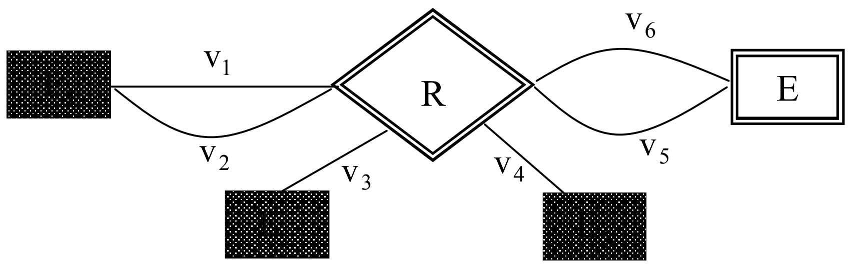


Рис. 2.1. Слабкий тип зв'язку R, який вводе слабкий тип сутності E з порушення вимоги використання одного рольового імені слабкого типу сутності

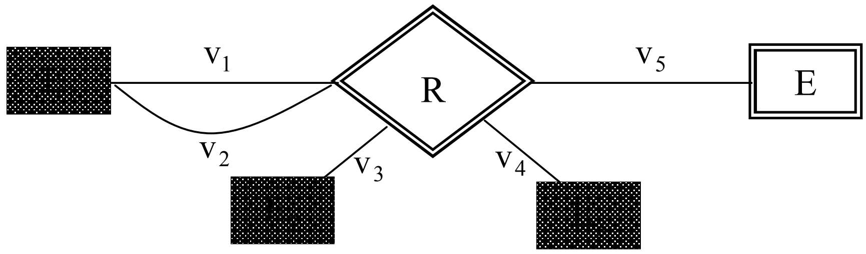


Рис. 2.2. Слабкий тип зв'язку R, який вводе слабкий тип сутності E

---

[1] Поняття тор обмеження кардинальності типу сутності деякого типу зв'язку докладно розглядається у розділі 3.

Сильним типом сутності (*strong entity type*) називають такий тип сутності, існування якого не залежить від інших типів сутностей.

Тип зв'язку, який не є слабким типом зв'язку, називається *сильним типом зв'язку* (*strong relationship type*).

Сильний тип зв'язку ще називають *регулярним відношенням сутності* (*regular entity relation)* [67], а слабкий тип зв'язку – *підтримуючим зв'язком* (*supporting relationships*) [14, гл. 2, с. 82-83], *ідентифікуючим зв'язком* (*identifying relationship*) [77, част. III, с. 68].

Сильний тип сутності називають ще *батьківським* (*parent*)*, сутністю-володарем* (*owner*)*, домінантним* (*dominant*) або *регулярним* (*regular*); слабкий тип сутності – *дочірнім* (*child*)*, залежним* (*dependent*) чи *підлеглим* (*subordinate*) [21, част. II, гл. 5, с. 185; 77, част. III, с. 68].

На діаграмі „сутність-зв'язок" слабкі типи сутностей та слабкі типи зв'язків мають свої позначення (див. додаток А).

Поняття слабкого типу сутності має декілька інтерпретацій (наприклад, [22, гл. 3]). Це зумовлено тим, що деякі проектанти моделей даних під слабким типом сутності розуміють такий тип сутності, який логічно залежить від інших типів сутностей. Інші ж вважають, що слабким типом сутності є тип сутності, наявність сутності якого в моделі даних залежить від наявності в моделі даних сутностей інших типів сутностей. Зрозуміло, що друга інтерпретація є більш вузькою.

Відмінність цих двох підходів можна побачити розглянувши наступні два приклади [22, гл. 3, с. 90].

Перший приклад – це два типи сутностей Керівник та Студент, причому за правилами учбового закладу кожен студент повинен мати керівника. За першим підходом (до визначення слабкого типу сутності) тип сутності Студент – слабкий тип сутності; але згідно другого підходу, якщо сутність типу сутності Студент може існувати без зв'язку з деякою сутністю типу сутності Керівник, тип сутності Студент – також сильний тип сутності (як і тип сутності Керівник).

Другий приклад – три типи сутностей Пацієнт, Лікар та Рецепт. Зрозуміло, що рецепт видається конкретному пацієнту деяким існуючим лікарем, тобто тип сутності Рецепт вводиться певним слабким типом зв’язку, який включає сильні типи сутностей Пацієнт та Лікар. Отже, тип сутності Рецепт є слабким типом сутності як при першому, так і при другому підходах (по-перше, між типами сутностей Пацієнт, Лікар та Рецепт існує логічний зв’язок; по-друге, сутність рецепт не може існувати без існуючих сутностей лікар та пацієнт).

Розглядаючи типи сутностей та типи зв’язків на рівні атрибутів і доменів, є і третій змістовний підхід трактування слабкого типу сутності. Іноді сутності деякого типу сутності неможливо унікально ідентифікувати значеннями їх власних атрибутів; значить, для їх ідентифікації треба використати слабкий тип зв’язку, який поєднує даний тип сутності з іншими типами сутностей (який вводить цей слабкий тип сутності), причому атрибути цих типів сутностей (сильних типів в даному контексті) будуть входити до складу первинного ключа слабкого типу сутності, що вводиться.

Цей тип сутності є особливим видом слабких типів сутностей і називається *ідентифікаційно-залежний типом сутності* (*ID-dependent entity type*); тобто це такий тип сутності, ідентифікатор сутностей (первинний ключ) якого містить ідентифікатори (первинні ключі) інших сутностей.

В даному випадку можна сказати, що ідентифікаційно-залежний тип сутності залежить від інших типів сутностей як логічно, так і фізично (оскільки поняття ключа можна відносити до цих двох рівнів). Деякі проектувальники баз даних обмежують слабкі типи сутностей саме ідентифікаційно-залежними типами сутностей. Зрозуміло, що остання інтерпретація слабких типів сутностей є найвужчою з трьох вищенаведених.

Розглянемо ідентифікаційно-залежний тип сутності на прикладі двох типів сутностей Квартира та Будинок [22, гл. 3, с. 89]. Нехай первинним ключем (ідентифікатором) типу сутності Будинок є атрибут НазваБудинку. Для того, щоб ідентифікувати сутності типу сутності Квартира, необхідно знати не тільки номер квартири та її внутрішні характеристики, але і будинок, в якому вона знаходиться; значить, ідентифікатором типу сутності Квартира є атрибути НазваБудинку та НомерКвартири. Оскільки ідентифікатор типу сутності Квартира містить в собі ідентифікатор типу сутності Будинок (а саме НазваБудинку), то тип сутності Квартира є ідентифікаційно-залежним від типу сутності Будинок.

Можлива ситуація, коли деякі типи сутностей, від яких залежить існування слабкого типу сутності, входять у слабкий тип зв'язку декілька раз у різних ролях.

Наприклад, слабкий тип зв'язку Контракт, який вводе слабкий тип сутності Контракти, включає (з'єднує) сильні типи сутностей Актори, Кінофільми, Студії [14, гл. 2, с. 82]. Зв'язок відображає, зокрема, факт укладання контракту між кіностудією, яка володіє правами на зйомку кінофільму, і іншою кіностудією, яка дозволяє актору приймати участь у роботі над даним фільмом (тому що актор є штатним співробітником цієї кіностудії). Як бачимо, тип сутності Студії входить у слабкий тип зв'язку Контракт у двох ролях – „студія-актор" (студія, в штаті якої знаходиться актор) та „студія-фільм" (студія, яка знімає фільм). Таким чином, слабкий тип сутності Контракти залежить від існування типів сутностей Актори, Кінофільми та Студії, але тип сутності Студії деталізує слабкий тип два рази.

Слабкий тип зв'язку можна зобразити за допомогою ациклічного орієнтованого графа (точніше дерева одиничної глибини), де множина вершин – множина типів сутностей, які є учасниками слабкого типу зв'язку, множина дуг – множина пар вершин (початком дуги буде вершина, що відповідає слабкому типу сутності, кінцем дуги – вершина, яка відповідає сильному типу сутності). При даній інтерпретації випадок, коли сильний тип сутності входе у даний слабкий тип зв'язку декілька раз у різних ролях, спрощується і зображається у вигляді однієї дуги.

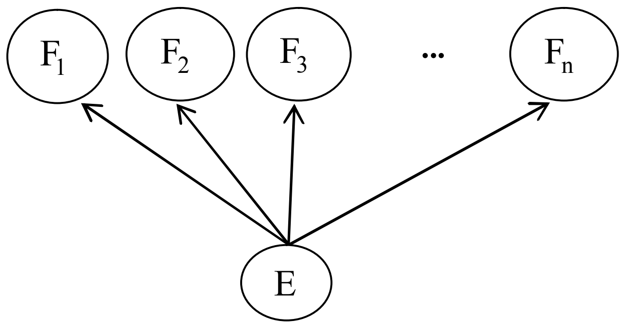


Рис. 2.3. Граф слабкого типу зв'язку

На рисунку 3 зображено граф, який зображає слабкий тип сутності E, існування якого залежить від сильних типів сутностей $F_1, F_2, ..., F_n$ і вводиться за допомогою слабкого типу зв'язку R.

Слід зазначити, що поняття сильного та слабкого типу сутності відносні, якщо їх розглядати для окремих слабких типів зв'язку (локальний розгляд). Так, один тип сутності в одному слабкому типі зв'язку може бути слабким типом сутності, а в іншому – сильним типом сутності.

2.2. Глобальний погляд. Модель по слабким типам зв'язків

Далі розглядаються поняття сильного та слабкого типу сутності для моделі (глобальний розгляд). Модель – це сукупність типів сутностей з визначеною для кожного з них скінченною множиною атрибутів і сукупність типів зв'язків, для кожного з яких також визначена множина атрибутів. В даному розділі явно атрибути моделі не розглядаються; тобто модель – це сукупність типів сутностей із заданими на них типами зв'язків.

Всі типи зв'язків моделі розбиваються на слабкі типи зв'язків та сильні типи зв'язків. Як зазначалося вище, слабкі типи зв'язків призначені для введення слабких типів сутностей.

Слабкий тип сутності в моделі – це такий тип сутності, який вводиться за допомогою деякого слабкого типу зв'язку моделі.

Будемо вимагати, що слабкий тип сутності може входити в єдиний слабкий тип зв'язку моделі, який його вводить.

Сильний тип сутності в моделі – це такий тип сутності, який не є слабким типом сутності в моделі.

Модель по слабким типам зв'язків – це модель, яка складається з всіх типів сутностей моделі і слабких типів зв'язків, які вводять відповідні слабкі типи сутностей. Вище була показана графова інтерпретація слабкого типу зв'язку локально (тобто для окремо взятого слабкого типу сутності, відповідних сильних типів сутностей та слабкого типу зв'язку, що вводить слабий тип сутності).

Аналогічно можна зобразити і модель по слабким типам зв'язків (рисунок 4), яка отримується шляхом об'єднання графів слабких типів зв'язків моделі та ізольованих вершин, які інтерпретують сильні типи сутностей в моделі і не є учасниками слабких типів зв'язків даної моделі.

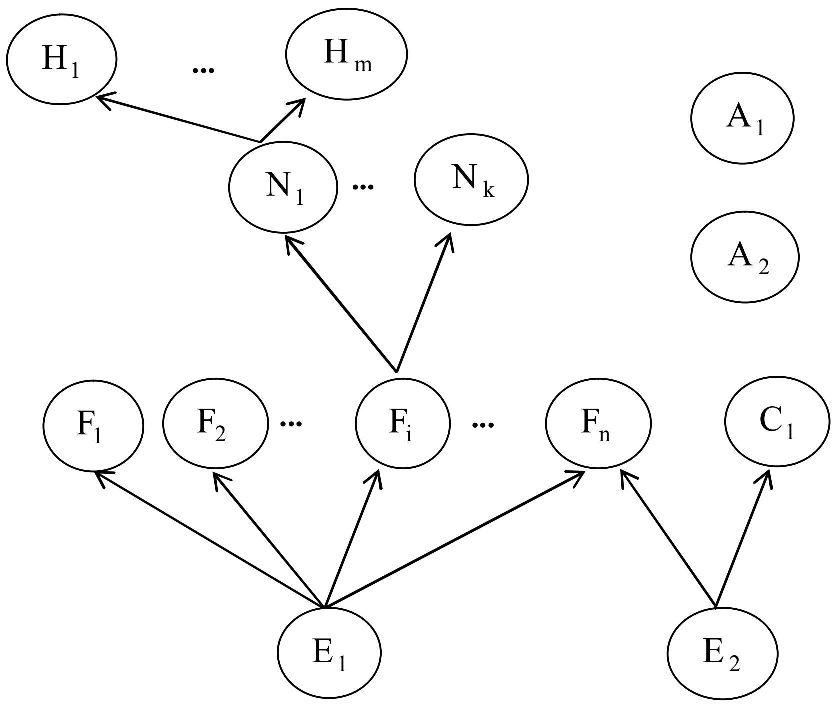


Рис. 2.4. Граф моделі по слабким типам зв'язків

Аналізуючи даний орієнтований граф моделі, можна виділити такі його особливості:

– множина вершин графа включає всі типи сутностей моделі;

– вершина, яка відповідає сильному типу сутності в моделі, або ізольована (тобто степінь вершини дорівнює 0), або тупикова (тобто їй инцидентні тільки вхідні дуги);

– вершина, яка відповідає слабкому типу сутності в моделі, інцидентна вихідним дугам, що з'єднують її з відповідними вершинами типів сутностей, від яких залежить існування даного слабкого типу сутності.

При побудові моделі бази даних спочатку проектанти визначають типи сутностей та типи зв'язків. Для того, щоб перевірити як побудовані слабкі і сильні типи сутностей та відповідні слабкі типи зв'язків, зображають відповідну модель по слабким типам зв'язків.

Дана модель буде *коректно побудована* (назвемо її *W-коректною* від англ. weak – слабий), якщо виконуються наступні умови:

– для будь-якого слабкого типу сутності в моделі існує єдиний слабкий тип зв'язку, який його вводе;

– модель по слабким типма зв'язків є ациклічним орієнтованим графом.

Уточнити вимоги до коректності зафіксованої моделі можна в термінах часткового порядку. Для цього розглядається множина M всіх типів сутностей цієї моделі, на якій задається бінарне відношення $<$:

$\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ існує слабкий тип зв'язку моделі, який вводить слабкий тип сутності E_1, причому тип сутності E_2 приймає участь у цьому типу зв'язку та відмінний від E_1.

Рефлексивно-транзитивне замикання відношення $<$ на множині M позначино через $\le^*$ (тобто $\le^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{i=0,1,2,\dots} <^i$, де $<^0 \overset{\text{def}}{=} \Delta_{\mathrm{M}}$ – діагональ на множині M, $<^{i+1} \overset{\text{def}}{=} < \circ <^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $\circ$ – композиція бінарних відношень).

Зауважимо, що у графі моделі по слабким типам зв'язків (рис. 4) кожна дуга відповідає парам бінарного відношення $<$.

Твердження 2.1. Модель є *W*-коректною тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq^{*}$ є частковим порядком. Тип сутності є сильним (слабким) типом сутності в моделі тоді і тільки тоді, коли цей тип є (відповідно не є) максимальним елементом (частково впорядкованої множини M). □

Доведення першого та другого тверджень випливають безпосередньо з означень, третє твердження випливає з другого. □

Присутність слабкого типу сутності в моделі „сутність-зв'язок" важлива для уявлення і розуміння предметної області. Слабкі типи зв'язків та слабкі типи сутностей вказують на особливий вид взаємодії типів сутностей та залежність між ними.

Але, не зважаючи на важливість даних понять, застосування їх може викликати деякі проблеми (див., наприклад, роботу Балабана (Balaban) і Шовала (Shoval) [46]):

– при використанні слабкого типу сутності необхідно зважати на той зміст, який вкладає проектант в дане поняття (різні тлумачення поняття розкривались у першому підрозділі даного розділу);

– слабкий тип сутності може не дуже легко ідентифікуватися, тобто слабкий тип сутності в моделі може уточнюватися іншими слабкими типами сутностей в моделі і т.і.;

– при трансформації концептуальної моделі (моделі „сутність-зв'язок") в логічну модель виникають проблеми відповідності між поняттями цих моделей; зазначимо, в деяких логічних моделях не має аналогів слабким типам сутностей та слабким типам зв'язків.

Питання необхідності понять слабого типу сутності та слабкого типу зв'язку у моделі „сутність-зв'язок" некоректно ставити тому, що дані поняття несуть важливу інформацію, потрібну в процесі моделювання. Деякі автори (див., наприклад, роботу Балабана (Balaban) і Шовала (Shoval) [46]) пропонують, щоб слабкі типи сутностей та слабкі типи зв'язків були присутні у моделі тільки на початкових етапах, фінальна ж модель не повинна їх містити. В роботі [46] слабкий тип сутності трансформувався або в сильний тип сутності з деякими *посилковими атрибутами* (*reference attribute*), в яких містилася інформація, що уточнювала даний тип сутності, або в атрибути свого „найближчого" сильного типу сутності; слабкі ж типи зв'язків трансформувались або в сильні типи зв'язків, або взагалі знищувались. Вибір шляху трансформації слабкого типу сутності залежить від проектанта та вимог до моделі. Також у даній роботі був запропонований алгоритм для побудови фінальної моделі, яка отримувалась після елімінації слабких типів сутностей та слабких типів зв'язків.

Основні результати розділу 2 наступні.

1. Уточнені поняття слабкого та сильного типів сутностей, слабкого та сильного типів зв'язків при локальному і глобальному поглядах.

2. Уточнена вимога коректності побудови моделі по слабким типам зв'язків в термінах часткового порядку (або ациклічності відповідного графу). Наявність слабких типів сутностей в моделі зумовлює обов'язкову перевірку моделі на коректність (W-коректність).

РОЗДІЛ 3. ОБМЕЖЕННЯ КАРДИНАЛЬНОСТІ

Мета розділу полягає у розгляді та формалізації обмежень кардинальності, які накладаються на типи зв'язків в моделі „сутність-зв'язок".

Об'єкт дослідження – поняття обмежень кардинальності типів зв'язків; окремо розглядаються обмеження кардинальності бінарних типів зв'язків та багатосторонніх типів зв'язків. При розгляді обмежень кардинальності висвітлюється два підходи до означення понять відповідних обмежень: кардинальність „дивитися через" та кардинальність участі. Математичним апаратом виступає теорії відношень та решіток.

Основні результати розділу: огляд різних підходів до понять обмеження кардинальності типів зв'язків; уточнення базових типів обмеження кардинальності за допомогою функціональності відношення, найменшої та найбільшої потужностей повних образів одноелементних множин, побудованих певним чином на основі n-арного відношення, проекції відношення; дослідження уточнень базових типів обмеження кардинальності та логічних зв'язків між різними видами обмежень кардинальності.

Основні результати розділу опубліковані в [5, 8, 10, 33, 37, 50, 51], апробовані на конференціях [5, 10, 37, 50].

3.1. Сучасний стан

Розглядаючи типи зв'язків, особлива увага приділяється обмеженням, які на них накладаються. Дані обмеження називаються *обмеженнями кардинальності* (*cardinality constraints*).

Поняття обмеження кардинальності складається з наступних трьох так званих базових типів обмеження кардинальності [83]:

– *max обмеження кардинальності* (*max cardinality constraint*);

– *min обмеження кардинальності* (*min cardinality constraint*);

– *mop обмеження кардинальності* (*mop cardinality constraint*).

min (max) обмеження кардинальності відображає найменшу (відповідно найбільшу) можливу кількість зв'язків типу зв'язку, що відповідають певним умовам вибору сутностей даного типу зв'язку. Саме ці умови вибору і будуть уточнені далі.

Розрізняють дві концепції означення min та max обмежень кардинальності:

– *концепція обмеженої кардинальності* (*restricted cardinality concept*);

– *концепція необмеженої кардинальності* (*unrestricted cardinality concept*).

Для обмеженої кардинальності значення min обмеження кардинальності можуть бути „*нуль*" або „*один*" (відповідно „*zero*", „*one*"), а значення max обмеження кардинальності – „*один*" або „*багато*" (відповідно „*one*", „*many*").

Для необмеженої кардинальності значення min обмеження кардинальності – будь-яке натуральне число, а значення max обмеження кардинальності – будь-яке натуральне число або „*багато*".

Характеристичні ознаки значень min та max обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності розглядаються далі для конкретних видів обмежень кардинальності.

Mop обмеження кардинальності показує повинен чи не повинен входити в тип зв'язку мінімум один зв'язок, який відповідає певним умовам вибору сутностей даного типу зв'язку.

Значення mop обмеження кардинальності можуть бути: „*обов'язкове*" („*mandatory*") або „*необов'язкове*" („*optional*") [83, с. 5] чи за іншою термінологією „*повне*" („*total"*) або „*часткове*" („*partial*") [20, част. II, гл. 5, с. 198]. Означення (та, звісно, значення) mop обмеження кардинальності не залежать від обмеженої чи необмеженої кардинальності; відповідні уточнення наводяться далі.

Таким чином, далі розглядаються наступні п'ять базових типів обмежень кардинальності:

1) *min обмеження кардинальності* (*обмежена кардинальність*);

2) *max обмеження кардинальності* (*обмежена кардинальність*);

3) *min обмеження кардинальності* (*необмежена кардинальність*);

4) *max обмеження кардинальності* (*необмежена кардинальність*);

5) *тор обмеження кардинальності*.

В залежності від умов вибору сутностей типу зв'язку та відповідних зв'язків даного типу зв'язку існують різні види (базових) обмежень кардинальності (див., наприклад, роботи Ферга [83], Тхелхеіма [115], Лензеріні (Lenzerini) і Сентуссі (Santucci) [93]).

В цій роботі розглядаються два найчастіше уживані підходи до визначення видів обмежень кардинальності.

Один з підходів до визначення видів обмежень кардинальності бере початок з основоположної роботи Чена [67] і використовується його прихильниками, наприклад, у роботах [49, 95, 105, 107, 112, 117]. На жаль, не має загальноприйнятої назви для даного підходу, в літературі зустрічаються наступні:

– *підхід „дивитися через”* (*look across approach*) [83];
– *нотація Чена* (*Chen notation*) [89].

Відповідно до цих назв існує і різнобій у термінології обмежень кардинальності:

– *кардинальність „дивитися через”* (*look across cardinality*) [83, 107];
– *ченівське обмеження* (*Chen-style constraint*) [89].

Далі використовується термін „кардинальність „дивитися через”.

Інший підхід до визначення видів обмежень бере початок від французької технології моделювання даних Меріса (Merise) [103] і має своїх прихильників (див., наприклад, [48, 52, 77, 81, 94, 116, 124]).

Як і попередній підхід даний також не має загальноприйнятої назви, зустрічаються наступні:

– *підхід „дивитися тут”* (*look here approach*) [89];
– *нотація Меріса* (*Merise notation*) [83].

Відповідно до назв даного підходу існує і різнобій у термінології:

– *кардинальність „дивитися тут”* (*look here cardinality*) [89];
– *кардинальність участі* (*participation cardinality*) [83].

Далі буде використовуватися термін „кардинальність участі” (бо термін „дивитися тут” є надто близьким до терміну „дивитися через”).

Підкреслимо, що для бінарних типів зв’язків різниця між цими двома підходами полягає лише у формі запису, по суті ці два підходи співпадають (див., наприклад, [89]), і далі буде наведено формальне доведення цього факту (твердження 3). Тому Ферг у роботі [83] запропонував розглядати для бінарних типів зв’язків єдиний вид обмежень кардинальності – *просту кардинальність* (*common cardinality*)[1].

Різниця між даними підходами до означення обмежень кардинальності стає очевидною, коли розглядаються багатосторонні типи зв’язків арності $n \geq 3$, і перший, хто звернув на це увагу, був, мабуть, Ферг [83].

Необхідно зазначити, що в доступній російсько- та україномовній літературі, на жаль, ці два підходи до визначення обмежень кардинальності чітко не розрізняються. Тобто, як правило, автори розглядають обмеження кардинальності тільки для бінарних типів зв’язків або розглядають лише один з підходів для багатосторонніх типів зв’язків (див., наприклад, [20]).

Питання, пов’язані з уточненнями понять обмежень кардинальності, можна знайти, наприклад, у роботах [89, 93, 115]. Тхелхеім [115] та Хартманн [89] використовують теорію реляційних баз даних для уточнення обмежень кардинальності, вони розглядають ці обмеження з позиції функціональних залежностей, наголошуючи, що обмеження кардинальності – це спеціальний вид функціональних залежностей. Лензеріні в роботі [93] за допомогою спеціально побудованої системи лінійних нерівностей вирішує проблему перевірки здійснимості (satisfiability) схеми моделі „сутність-зв’язок”, тобто сумісності сутностей, зв’язків моделі, min та max обмежень кардинальності деякого виду – обмеження співвідношення кардинальності (cardinality ratio constraint). Також в даній роботі запропонована схема знаходження типів

[1] Термін *common cardinality* можна перекладати як загальна кардинальність, спільна кардинальність, елементарна кардинальність, проста кардинальність. Зважаючи на те, що у доступних російських та україномовних джерелах даний термін не зустрічається, тому був обраний найбільш адекватний варіант перекладу – проста кардинальність.

сутностей і типів зв'язків, які порушують умови здійснимості, за допомогою теорії графів.

Обмеження кардинальності типів зв'язків далі будуть уточнюватися на мові теорії відношень (зокрема, будуть застосовані поняття функціональності відношення, найменшої та найбільшої потужностей повних образів одноелементних множин, побудованих певним чином на основі n-арного відношення, проекції відношення).

В наступних двох підрозділах розглядаються базові типи обмежень кардинальності для простої кардинальності (випадок бінарних типів зв'язків) та для підходів „дивитися через”, участі (випадок багатосторонніх типів зв'язків).

3.2. Обмеження кардинальності бінарних типів зв'язків

Проста кардинальність, змістовно кажучи, задає кількість зв'язків для кожної сутності типу сутності даного типу зв'язку; якщо казати більш точно, то ця кардинальність задає кількість сутностей, асоційованих з фіксованою сутністю.

Далі розглядаються означення базових типів простої кардинальності.

3.2.1. Min та max обмеження простої кардинальності , концепція обмеженої кардинальності

В цьому пункті розглядається проста кардинальність при концепції обмеженої кардинальності; для спрощення викладу іноді ця обставина явно не вказується.

Min обмеження кардинальності базується на мінімальній кількості зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності типу сутності даного типу зв'язку.

Характеристична ознака min обмеження кардинальності (простої обмеженої): для типу зв'язку R між типами сутностей E, F значення *„один” min обмеження кардинальності для типу сутності* E (F) означає, що будь-яка сутність типу сутності E (відповідно F) з'єднуються (типом зв'язку R) щонайменше з однією сутністю типу сутності F (відповідно E).

В протилежному випадку *min обмеження кардинальності для типу сутності* E (F) має *значення „нуль”*, тобто існує така сутність типу сутності E (відповідно F), що не з’єднуються (типом зв’язку R) з будь-якою сутністю типу сутності F (відповідно E).

Нехай типи сутностей E та F інтерпретуються як множини **E** та **F** відповідно, а тип зв’язку R – як бінарне відношення **R** на множинах **E** та **F**, причому, для визначеності, нехай $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ (порядок множин у декартовому добутку суттєвий). Як звичайно $\mathbf{R}^{-1} \subseteq \mathbf{F} \times \mathbf{E}$ – відношення, обернене до **R**.

В даних позначеннях маємо таблицю 1, де $\pi_1^2(\mathbf{R})$, $\pi_2^2(\mathbf{R})$ – проекції бінарного відношення відповідно за першою та другою компонентами. Крім того, в цій таблиці записані значення оператора $\mathbf{min}$, який уточнює обмеження кардинальності типу зв’язку для необмеженої кардинальності і буде детально розглядатися нижче в п. 3.2.3.

Таблиця 3.1

Взаємозв’язок між min обмеження (простої обмеженої) кардинальності, проекцією відношення та значеннями оператору min

Проекція відношення	**Min обмеження кардинальності**	**Значення оператору min**
$\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}$	min обмеження кардинальності типу сутності E у типі зв’язку R „один”	$0 < \mathbf{min}(\mathbf{R})$
$\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}$	min обмеження кардинальності типу сутності E у типі зв’язку R „нуль”	$\mathbf{min}(\mathbf{R}) = 0$
$\pi_2^2(\mathbf{R}) = \mathbf{F}$	min обмеження кардинальності типу сутності F у типі зв’язку R „один”	$0 < \mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1})$
$\pi_2^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{F}$	min обмеження кардинальності типу сутності F у типі зв’язку R „нуль”	$\mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1}) = 0$

Шукане уточнення значень min обмеження кардинальності наступне: значення min обмеження кардинальності типу сутності E (F) у типі зв’язку R

„один”, якщо виконується рівність $\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}$ (відповідно $\pi_2^2(\mathbf{R}) = \mathbf{F}$); якщо ж виконується строге включення $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}$ (відповідно $\pi_2^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{F}$), то значення min обмеження кардинальності типу сутності E (F) у типі зв'язку R „нуль”.

Max обмеження кардинальності базується на максимальній кількості зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності типу сутності даного типу зв'язку.

В літературі max обмеження простої кардинальності при використанні концепції обмеженої кардинальності іноді називають *показником кардинальності* (*index cardinality*) [20, част. II, гл. 5, с. 194].

Характеристична ознака max обмеження кардинальності (простої обмеженої): для типу зв'язку R між типами сутностей E, F значення *„один” max обмеження кардинальності для типу сутності* E (F) означає, що будь-яка сутність типу сутності E (відповідно F) з'єднується (типом зв'язку R) не більше ніж з однією сутністю типу сутності F (відповідно E).

В протилежному випадку *max обмеження кардинальності для типу сутності* E (F) має *значення „багато”*, тобто існує сутність типу сутності E (відповідно F), що з'єднуються (типом зв'язку R) з декількома сутностями типу сутності F (відповідно E).

Серед бінарних типів зв'язків виділяють типи зв'язків з значеннями max обмеження кардинальності (простої обмеженої) *„один до одного”* (*1:1)*, *„багато до одного”* (*M:1*), *„один до багатьох”* (*1:M*) та *„багато до багатьох”* (*M:N*). Далі описуються відповідні характеристичні властивості таких типів зв'язків.

Нехай, як і раніше, тип зв'язку R з'єднує типи сутностей E і F, тоді характеристичні ознаки наступні.

1. Якщо кожна сутність типу сутності E за допомогою типу зв'язку R з'єднується не більше ніж з однією сутністю типу сутності F, то тип зв'язку R є виду *„багато до одного”* (*many-one relationship*), *який направлений від* E *до* F (зауважимо, що може існувати сутність типу сутності F, яка з'єднується з багатьма сутностями типу сутності E).

Якщо ж кожна сутність типу сутності F за допомогою типу зв'язку R з'єднується не більш ніж з однією сутністю типу сутності E, то тип зв'язку R має вид *„багато до одного"*, *який направлений від* F *до* E (знову ж таки може існувати сутність типу сутності E, яка з'єднується з багатьма сутностями типу сутності F).

Є і інша назва, еквівалентна для останнього випадку: тип зв'язку R має вид *„один до багатьох"* (*one-many relationship,*), направлений від E до F.

Отже, при видах типів зв'язків „багато до одного" та „один до багатьох" суттєвим є напрямок відповідного зв'язку; ці види семантично еквівалентні, просто напрямок зв'язку змінюється на обернений.

2. Якщо тип зв'язку R в обох напрямах – від E до F і від F до E – відноситься до виду „багато до одного" (еквівалентно: до виду „один до багатьох"), то за означенням тип зв'язку R відноситься до виду *„один до одного"* (*one-one relationship*).

Очевидно, що в цьому випадку кожна сутність одного типу сутності з'єднується не більш ніж з однією сутністю іншого типу сутності. Напрямок зв'язку при цьому не має сенсу вводити з огляду на повну симетричність типів сутностей, що приймають участь у типі зв'язку.

3. Якщо ж тип зв'язку R ні в одному напрямку – від E до F і від F до E – не відноситься до виду „багато до одного" (еквівалентно: до виду „один до багатьох"), то за означенням тип зв'язку R відноситься до виду *„багато до багатьох"* (*many-many relationship*).

Напрямок зв'язку при цьому також не має сенсу вводити з огляду на повну симетричність типів сутностей, що приймають участь у типі зв'язку.

В таблиці 2 показано взаємозв'язок між max обмеження кардинальності (простої, обмежена кардинальність) типу зв'язку і властивостями функціональності бінарних відношень $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^{-1}$. Крім того, в цій таблиці записані значення оператора $\mathbf{max}$, який уточнює обмеження кардинальності типу зв’язку для необмеженої кардинальності і буде детально розглядатися нижче в п. 3.2.3.

Таблиця 3.2

Взаємозв’язок між max обмеження кардинальності (простої обмеженої), функціональністю бінарних відношень та значеннями оператору max

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Функціональність відношення R</td></tr>
<tr><td>R функціональне</td><td>R не функціональне</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Функціо-нальність відношення $\mathbf{R}^{-1}$</td><td rowspan="2">$\mathbf{R}^{-1}$ функціо-нальне</td><td>R – „один до одного”, (1:1)</td><td>R – „багато до одного”, (M:1), який направлений від F до E
R – „один до багатьох”, (1:M), який направлений від E до F</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{max}(\mathbf{R}) \le 1 \ \wedge$
$\mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) \le 1$</td><td>$2 \le \mathbf{max}(\mathbf{R}) \le \infty \ \wedge$
$\mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) \le 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbf{R}^{-1}$ не функціо-нальне</td><td>R – „багато до одного”, (M:1), який направлений від E до F
R – „один до багатьох”, (1:M), який направлений від F до E</td><td>R – „багато до багатьох”, (M:N)</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{max}(\mathbf{R}) \le 1 \ \wedge$
$2 \le \mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) \le \infty$</td><td>$2 \le \mathbf{max}(\mathbf{R}) \le \infty \ \wedge$
$2 \le \mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) \le \infty$</td></tr>
</table>

Як видно, тип зв’язку буде виду „один до одного”, коли обидва відношення **R**, $\mathbf{R}^{-1}$ функціональні; виду „один до багатьох” (еквівалентно: „багато до одного”) – коли в точності одне з цих відношень функціональне;

нарешті, виду „багато до багатьох” – коли обидва з цих відношень не функціональні.

Таким чином, можна зробити висновок: обмеження „один до багатьох” („багато до одного”) пов’язане з функціональністю (чи з ін’єктивністю) в точності одного з відношень **R**, $\mathbf{R}^{-1}$; „один до одного” – з одночасною функціональністю (чи ін’єктивністю) цих відношень; нарешті, „багато до багатьох” – з бінарними відношеннями загального вигляду[1].

Уточнення поняття max обмеження кардинальності (простої обмеженої): тип зв’язку R має значення „один” max обмеження кардинальності для типу сутності E (F), якщо відношення **R** на множинах **E**, **F** (відповідно відношення $\mathbf{R}^{-1}$ на множинах **F**, **E**) є функціональним; відповідно, тип зв’язку R має значення „багато” max обмеження кардинальності для типу сутності E (F), якщо відношення **R** на множинах **E**, **F** (відповідно відношення $\mathbf{R}^{-1}$ на множинах **F**, **E**) не є функціональним.

3.2.2. Mop обмеження простої кардинальності

В цьому пункті, як і в попередньому, розглядається проста кардинальність; для спрощення викладу іноді ця обставина явно не вказується.

Mop обмеження простої кардинальності (*Mandatory/Optional participation common cardinality constraint*) показує чи повинен входити в тип зв’язку мінімум один зв’язок для будь-якої сутності типу сутності.

В літературі mop обмеження кардинальності (простої), іноді називають *степінь участі сутності в зв’язку* [20, част. II, гл. 5, с. 198].

Нехай, як і раніше, тип зв’язку R з’єднує типи сутностей E і F. Характеристична ознака mop обмеження простої кардинальності: якщо кожна сутність типу сутності E (F) знаходиться принаймні в одному зв’язку згідно типу зв’язку R, то *mop обмеження простої кардинальності типу сутності* E

[1] Треба врахувати очевидний логічний зв’язок між функціональністю та ін’єктивністю: бінарне відношення функціональне тоді і тільки тоді, коли обернене відношення ін’єктивне (дивись, наприклад [6, твердження 1]).

(відповідно F) у типі зв'язку R *обов'язкове*; якщо ж може існувати сутність типу сутності E (відповідно F), яка згідно типу зв'язку R не знаходиться у зв'язку з довільною сутністю типу сутності F (відповідно E), то то *mор обмеження кардинальності типу сутності* E (відповідно F) у типі зв'язку R *необов'язкове*.

Уточнення поняття обов'язкового та необов'язкового mор обмеження кардинальності проводиться в термінах проекції відношення. В попередніх позначеннях маємо наступну таблицю 3, де, як і раніше в таблиці 1, $\pi_1^2(\mathbf{R})$, $\pi_2^2(\mathbf{R})$– проекції бінарного відношення. Крім того, в цій таблиці наведені значення оператора $\mathbf{min}$, який уточнює обмеження кардинальності типу зв'язку для необмеженої кардинальності і буде детально розглядатися нижче в п. 3.2.3..

Таблиця 3.3

Взаємозв'язок між mор обмеження простої кардинальності, проекцією відношення та значеннями оператору min

Проекція відношення	**Мор обмеження кардинальності (простої)**	**Значення оператору min**
$\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}$	mор обмеження простої кардинальності типу сутності E у типі зв'язку R обов'язкове	$0 < \mathbf{min}(\mathbf{R})$
$\pi_1^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}$	mор обмеження простої кардинальності типу сутності E у типі зв'язку R необов'язкове	$\mathbf{min}(\mathbf{R}) \geq 0$
$\pi_2^2(\mathbf{R}) = \mathbf{F}$	mор обмеження простої кардинальності типу сутності F у типі зв'язку R обов'язкове	$0 < \mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1})$
$\pi_2^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{F}$	mор обмеження простої кардинальності типу сутності F у типі зв'язку R необов'язкове	$\mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1}) \geq 0$

Порівнюючи таблиці 1 та 3, слід відмітити наступне, включення $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}$ ($\pi_2^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{F}$) виконується завжди; отже, якщо про тип зв'язку (про відповідне відношення) нема ніякої додаткової інформації, то значення mор обмеження кардинальності (простої) типу сутності E (F) у типі зв'язку R необов'язкове.

У випадку, коли точно є сутності, які не приймають участь у типі зв'язку (інформація відома), використовується строге включення $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}$ ($\pi_2^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{F}$) і значення min обмеження кардинальності (простої) типу сутності E (F) у типі зв'язку R буде „нуль". Рівність $\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}$ ($\pi_2^2(\mathbf{R}) = \mathbf{F}$) вказує на існування точної інформації про тип зв'язку і відповідно значення mop обмеження кардинальності типу сутності E (F) у типі зв'язку R буде обов'язкове, а значення min обмеження кардинальності типу сутності E (F) у типі зв'язку R буде „один".

Дані логічні зв'язки більш детально розглядаються для min та mop обмеження кардинальності для підходів „дивитися через" та участі (твердження 1 та 2).

3.2.3. Min та max обмеження простої кардинальності, концепція необмеженої кардинальності

В цьому пункті розглядається проста кардинальність при концепції необмеженої кардинальності; для спрощення викладу іноді ця обставина явно не вказується.

Спосіб відображення обмежень простої необмеженої кардинальності через значення min та max обмежень кардинальності дозволяє відобразити більше інформації про зв'язок. В літературі данний вид базових обмежень кардинальності ще називають *структурними обмеженнями вигляду (min, max)* [20, част. II, гл. 5].

Розглянемо простий змістовний приклад. В попередніх позначеннях, нехай для типу зв'язку R значення min та max обмежень кардинальності типу сутності E позначені відповідно числами 5, N; це означає, що найменша кількість сутностей типу сутності F, які пов'язані з однією сутністю типу сутності E, дорівнює 5, а найбільшої кількості просто не існує.

Характеристична ознака min обмеження простої необмеженої кардинальності: для типу зв'язку R між типами сутностей E, F значення

$n, n \geq 0$ *min обмеження простої необмеженої кардинальності для типу сутності* E означає, що будь-яка сутність типу сутності E з'єднується (типом зв'язку R) щонайменше з n сутностями типу сутності F (випадок $n = 0$ означає, що існує така сутність типу сутності E, яка не приймає взагалі участь у зв'язках, тобто не з'єднується з жодною сутністю типу сутності F).

Характеристична ознака max обмеження простої необмеженої кардинальності: для типу зв'язку R між типами сутностей E, F значення $n, n \geq 0$ *max обмеження простої необмеженої кардинальності для типу сутності* E означає, що будь-яка сутність типу сутності E з'єднуються (типом зв'язку R) щонайбільше з n сутностями типу сутності F (випадок $n = 0$ означає, що будь-яка сутність типу сутності E взагалі не приймає участь у зв'язках, тобто тип зв'язку просто порожній).

Для типу зв'язку R між типами сутностей E, F значення ∞ *max обмеження простої необмеженої кардинальності для типу сутності* E означає, що для будь-якого натурального числа n існує така сутність типу сутності E, що з'єднуються (типом зв'язку R) з m сутностями типу сутності F, причому $m > n$.

Уточнюються такі обмеження кардинальності за допомогою повного образу одноелементних множин.

Як і раніше типи сутностей E, F інтерпретуються як множини **E**, **F**; елементи таких множин позначаються як x,y,.... Вимагається непорожність цих множин, суттєвість такого необтяжливого обмеження показано нижче.

Згідно попередніх інтерпретацій типу зв'язку R, маємо бінарне відношення **R** на множинах **E** та **F**, причому, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Нехай $x \in \mathbf{E}$, повний образ одноелементної множини $\{x\}$ відносно відношення **R** позначається через $\mathbf{R}[x]$; згідно з означенням $\mathbf{R}[x] \overset{\text{def}}{=} \{ y \mid y \in \mathbf{F} \wedge \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \}$ – множина всіх елементів множини **F**, які знаходяться у відношенні **R** з елементом x (див., наприклад, [6]).

Вважається, що множини **E**, **F** не більш ніж злічені, а всі повні образі одноелементних множин скінченні; з огляду на фінітність всіх об'єктів такі обмеження є природними.

Непорожню множину потужностей повних образів всіх елементів множини **E**, позначино як $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \{|\mathbf{R}[x]| \,|\, x \in \mathbf{E}\}$ (саме тут суттєва непорожність множини **E**).

Зауважимо: якщо навіть відношення **R** порожнє, то множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ непорожня, точніше $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \{0\}$.

Зрозуміло, що $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ – непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-якому випадку ця множина має найменший елемент, якій позначино як $\mathbf{min}(\mathbf{R})$. Найбільшого ж елементу множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ може і не мати, тому вводиться наступне означення, в якому ∞ – деякий елемент, що не належить множині натуральних чисел:

$$\mathbf{max}(\mathbf{R}) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } \mathbf{Im}(\mathbf{R}), \text{ якщо } \mathbf{Im}(\mathbf{R}) \text{ скінченна множина,} \\ \infty, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

По суті йдеться про поповнення множини натуральний чисел N з стандартним порядком $\le$ найбільшим елементом ∞ та про її перетворення в повну решітку $< \mathrm{N}', \le >$, де $\mathrm{N}' \overset{\text{def}}{=} \mathrm{N} \cup \{\infty\}$, причому $n < \infty$ для всіх $n \in \mathrm{N}$ [1, гл. V, § 3,с. 153].

Безпосередньо з означень випливають рівності

$$\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \prod \mathbf{Im}(\mathbf{R}),\ \mathbf{max}(\mathbf{R}) = \coprod \mathbf{Im}(\mathbf{R}), \tag{3.1}$$

де символи $\prod, \coprod$ використовуються для позначення інфімумів та супремумів відповідно в повній решітці N' (при перевірці рівності для оператора **max** треба розглянути випадки скінченної та нескінченної множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$).

Зауважимо: для виконання рівностей (1) також суттєва непорожність множини **E**, бо саме з непорожності множини **E** випливає непорожність числової множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$, а зазначені рівності для порожньої множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$

(тобто для порожніх множин **E**, **R**) згідно з стандартними домовленостями щодо точних граней порожньої множини приймають вигляд $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \infty$, $\mathbf{max}(\mathbf{R}) = 0$ (супремум порожньої множини співпадає з найменшим елементом, а інфімум – з найбільшим; див., наприклад, [2]).

Очевидно, що розумно інтерпретувати цей граничний випадок важко; крім того, наприклад, п. 1 подальшої леми 1 просто не виконується для порожнього відношення на порожніх множинах.

Обіцяне уточнення обмежень кардинальності проводиться так:

– для типу зв’язку R між типами сутностей E**,** F значення *min обмеження простої необмеженої кардинальності для типу сутності* E покладається рівним $\mathbf{min}(\mathbf{R})$;

– для типу зв’язку R між типами сутностей E**,** F значення *max обмеження простої необмеженої кардинальності для типу сутності* E покладається рівним $\mathbf{max}(\mathbf{R})$.

Подальша основна задача цього пункту полягає в дослідженні логічного зв’язку між значеннями введених операторів на вихідному відношенні **R** та на відношенні, оберненому до вихідного $\mathbf{R}^{-1}$; наведемо відповідне обґрунтування; зауважимо, що оператори **min**,**max** вводяться також і на відношенні $\mathbf{R}^{-1}$, аналогічно як і на відношенні **R** (множини **E, F** міняються ролями).

Нехай, як і раніше, R – тип зв'язку між типами сутностей E та F, a (min1, max1) і (min2, max2) – пари значень обмежень min та max (простої необмеженої) кардинальності для типів сутностей E та F відповідно; ця ситуація в графічній нотації UML [12] зображена на рисунку 1.

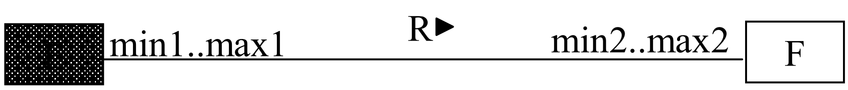


Рис. 3.1. Тип зв'язку R між типами сутностей E і F з обмеженнями min та max кардинальності

В цих позначеннях задача формулюється так: знайти логічний зв'язок між парами значень $(\min 1, \max 1)$ і $(\min 2, \max 2)$ або довести відсутність такого зв'язку; іншими словами, треба підтвердити або заперечити необхідність перевірки сумісності вказаних значень при введенні обмежень.

Ця нетривіальна задача буде розв’язана в наведеній далі теоремі, доведення якої спирається на наступні леми, в яких встановлені необхідні властивості операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$.

Лема 3.1 (про властивості операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$). Для довільного бінарного відношення $\mathbf{R}$ та непорожньої множини $\mathbf{E}$, такої, що $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}$, виконуються наступні твердження:

1. $\mathbf{min}(\mathbf{R}) \le \mathbf{max}(\mathbf{R})$; більш того, $\mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow |\mathbf{Im}(\mathbf{R})| \ge 2$, зокрема, $\mathbf{max}(\mathbf{R}) = \infty \Rightarrow \mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R})$;
2. $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow |\mathbf{Im}(\mathbf{R})| = 1$; тобто $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \forall x, y \left(x, y \in \mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{R}[x]| = |\mathbf{R}[y]|\right)$;
3. нехай k – таке натуральне число, що $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = k$, тоді $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \{k\}$, тобто $\forall x \left(x \in \mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{R}[x]| = k\right)$;
4. нехай k – таке натуральне число, що $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \{k\}$ (тобто $\forall x \left(x \in \mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{R}[x]| = k\right)$); тоді $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = k$;
5. $\mathbf{R} = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = 0$;

більш того, $\mathbf{R} = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = \mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) = 0$

(характеристична ознака порожнього відношення);

6. $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{min}(\mathbf{R}) = 0$, $\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{min}(\mathbf{R}) > 0$ (характеристичні ознаки порожності або непорожності значення $\mathbf{min}(\mathbf{R})$);
7. $0 < \mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R}) \Rightarrow \left|\pi_1^2(\mathbf{R})\right| \ge 2$;
8. $\mathbf{max}(\mathbf{R}) = \infty \Rightarrow \pi_1^2(\mathbf{R})$ і $\pi_2^2(\mathbf{R})$ злічені;

9. $\mathbf{R}$ – функціональне відношення $\Leftrightarrow$ $\mathbf{max}(\mathbf{R}) \le 1$ (характеристична ознака функціональних бінарних відношень). □

Доведення. Нерівність $\mathbf{min}(\mathbf{R}) \le \mathbf{max}(\mathbf{R})$ п. 1 безпосередньо випливає з рівностей (1), далі встановлюється еквівалентність, а саме необхідність. Нехай виконується строга нерівність $\mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R})$, необхідно показати, що множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ містить щонайменше 2 елемента. Дійсно, ця множина не порожня, а якщо ж вона одноелемента, то згідно з рівностями (1) її точні грані збігаються з єдиним елементом множини, тобто $\mathbf{min(R)} = \mathbf{max(R)}$, що суперечить припущенню. Далі розглядається достатність: нехай множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ містить щонайменше 2 елемента, необхідно показати, що тоді $\mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R})$. Дійсно, нехай n, m різні елементи множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$, такі, що $\mathrm{n} < \mathrm{m}$. Залишається врахувати очевидні нерівності $\mathbf{min}(\mathbf{R}) \le \mathrm{n} < \mathrm{m} \le \mathbf{max}(\mathbf{R})$.

Слід зауважити, що встановлена еквівалентність по суті є наслідком наступної загальнозначної характеристичної властивості одноелементних множин в частково впорядкованих множинах, що містять щонайменше 2 елемента: $\coprod \mathrm{X} = \prod \mathrm{X} \Leftrightarrow |\mathrm{X}| = 1$.

Нарешті, остання імплікація п. 1 випливає з встановленої еквівалентності, оскільки рівність $\mathbf{max}(\mathbf{R}) = \infty$ означає, що множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ нескінченна (зауважимо, що ця імплікація не обертається). ▫

Перша еквівалентність п. 2 випливає з встановленої еквівалентності п. 1 з врахуванням непорожності множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ (треба просто перейти до заперечень в кожній з частин еквівалентності п. 1).

Друга еквівалентність цього пункту випливає з першої оскільки праві частини цих двох еквівалентностей еквівалентні. ▫

Пп. 3, 4 випливають з п. 2 та означення операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ (у випадку одноелементної множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ ці оператори просто вибирають єдиний елемент цієї множини). ▫

Далі розглядається необхідність у першій еквівалентності п. 5: нехай $\mathbf{R} = \varnothing$.Тоді повний образ вигляду $\mathbf{R}[\mathrm{x}]$ для всіх елементів $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$ також порожній, тобто $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \{0\}$; залишається застосувати п. 4. Доведення достатності: нехай $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = 0$. Тоді згідно з п. 3 $\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathbf{E} \Rightarrow \left|\mathbf{R}[\mathrm{x}]\right| = 0)$, тобто повний образ $\mathbf{R}[\mathrm{x}]$ для всіх елементів $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$ порожній, а це може виконуватись тільки для порожнього відношення $\mathbf{R}$.

Друга еквівалентність випливає з першої (бо інверсія порожнього відношення знову порожня). ▫

Розгляд п. 6 починається з необхідності для першої еквівалентності. Нехай $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}$, тоді найдеться елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$, такий, що $\mathrm{x} \notin \pi_1^2(\mathbf{R})$; отже повний образ $\mathbf{R}[\mathrm{x}]$ порожній, тобто $0 \in \mathbf{Im}(\mathbf{R})$. Оскільки 0 найменший елемент, то $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \prod \mathbf{Im}(\mathbf{R}) = 0$. Переходячи до достатності (для першої еквівалентності): нехай $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = 0$, тоді оскільки повна решітка $< \mathrm{N}', \leq >$ цілком упорядкована, то $0 \in \mathbf{Im}(\mathbf{R})$. Звідси випливає існування елемента $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$, такого, що $|\mathbf{R}[\mathrm{x}]| = 0$, тобто повний образ $\mathbf{R}[\mathrm{x}]$ порожній. Очевидно, що $\mathrm{x} \notin \pi_1^2(\mathbf{R})$, тобто $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}$.

Друга еквівалентність пункту випливає з першої, в першій еквівалентності просто треба перейти до заперечень в обох частинах (врахувавши, що завжди $\mathbf{min}(\mathbf{R}) \geq 0$ та $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}$). ▫

Далі розглядається п. 7. Так як $0 < \mathbf{min}(\mathbf{R})$, то згідно з другою еквівалентністю п. 6 $\pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}$; оскільки ж $\mathbf{min}(\mathbf{R}) < \mathbf{max}(\mathbf{R})$, то згідно з еквівалентністю п. 1 $|\mathbf{Im}(\mathbf{R})| \geq 2$. Оскільки за означенням $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\left|\mathbf{R}[\mathrm{x}]\right| \mathrm{x} \in \mathbf{E}\}$, тобто в нашому випадку $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \{\left|\mathbf{R}[\mathrm{x}]\right| \mathrm{x} \in \pi_1^2(\mathbf{R})\}$, то, очевидно, що $|\pi_1^2(\mathbf{R})| \geq 2$.

Обернути імплікацію пункту не можна, це показують прості приклади. ▫

Імплікацію п. 8 доводиться від супротивного: нехай $\mathbf{max}(\mathbf{R}) = \infty$, але хоча б одна з проекцій відношення $\pi_1^2(\mathbf{R})$, $\pi_2^2(\mathbf{R})$ скінченна. Розглянемо перший випадок – проекція $\pi_1^2(\mathbf{R})$ скінченна. Безпосередньо з означень випливає наступна кускова схема для множини $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ (наприклад, в першому рядку треба врахувати, що $\mathbf{R}[\mathrm{x}] = \varnothing$ для всіх $x \in \mathbf{E} \setminus \pi_1^2(\mathbf{R})$)

$$\mathbf{Im}(\mathbf{R}) = \begin{cases} \{|\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,|\,|\,\mathrm{x} \in \pi_1^2(\mathbf{R})\} \cup \{0\}, \text{якщо}\, \pi_1^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}, \\ \{|\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,|\,|\,\mathrm{x} \in \pi_1^2(\mathbf{R})\}, \text{якщо}\, \pi_1^2(\mathbf{R}) = \mathbf{E}. \end{cases}$$

Отже, якщо проекція $\pi_1^2(\mathbf{R})$ скінченна, то і множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ скінченна, а, значить, $\mathbf{max}(\mathbf{R})$ – натуральне число. Прийшли до протиріччя.

Розглянемо другий випадок – проекція $\pi_2^2(\mathbf{R})$ скінченна. Безпосередньо з означень випливає включення $\mathbf{R}[\mathrm{x}] \subseteq \pi_2^2(\mathbf{R})$ для всіх $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$, тобто $|\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,| \le |\,\pi_2^2(\mathbf{R})\,|$ для всіх $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$. Таким чином, з скінченності множини $\pi_2^2(\mathbf{R})$ випливає, що множина $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$ також скінченна, а, значить, $\mathbf{max}(\mathbf{R})$ – натуральне число. Знову прийшли до протиріччя.

Доведена імплікація не обертається в загальному випадку; найпростіший приклад – бієкція між двома зліченими множинами (згідно з наступним пунктом леми оператор $\mathbf{max}$ прийме одиничне значення для цього випадку). ▫

Далі доводиться необхідність в еквівалентності п. 9. Нехай відношення $\mathbf{R}$ функціональне, тоді повний образ вигляду $\mathbf{R}[\mathrm{x}]$ для всіх $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$ містить щонайбільше один елемент, тобто $|\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,| \le 1$ для всіх $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$. Таким чином, $\mathbf{Im}(\mathbf{R}) \subseteq \{0,1\}$, звідки випливає, що $\mathbf{max}(\mathbf{R}) \le 1$.

Достатність доводиться від супротивного: нехай $\mathbf{max}(\mathbf{R}) \le 1$, але відношення не є функціональним. Тоді існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{E}$, такий, що $|\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,| \ge 2$; позначимо $\mathrm{p} \overset{\text{def}}{=} |\,\mathbf{R}[\mathrm{x}]\,|$, тоді $\mathrm{p} \in \mathbf{Im}(\mathbf{R})$, причому $\mathrm{p} \ge 2$. Нарешті, з формул (3.1) випливає, що $\mathbf{max}(\mathbf{R}) \ge \mathrm{p} \ge 2$ – прийшли до протиріччя. ▫ □

З пунктів 6, 9 випливає заповнення таблиць 1-3 щодо операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$. Отже за допомогою введених операторів дуже просто виражаються min і max обмеження простої обмеженої кардинальності та mop обмеження простої кардинальності.

Лема 3.2 (про значення операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ на скінченному універсальному відношенні). Нехай $|\mathbf{E}| = p > 0$, $|\mathbf{F}| = k > 0$, а $\mathrm{U}(p,k) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{F}$ – універсальне відношення на множинах $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$; тоді $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = k$ та $\mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1}) = p$. □

Доведення. Згідно з означенням універсального відношення має місце $|\mathbf{R}[x]| = k$ для всіх $x \in \mathbf{E}$. Отже рівності $\mathbf{min}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}(\mathbf{R}) = k$ випливають з п. 4 попередньої леми 1. Рівності для оберненого відношення доводяться аналогічно. □

Значення операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ залежать не тільки від аргументу-відношення (в попередніх позначеннях $\mathbf{R}$), а і від параметра – множини, якій належать перші компоненти пар відношення (множини $\mathbf{E}$); тому точніше було б писати, наприклад, $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R})$ замість $\mathbf{min}(\mathbf{R})$ та $\mathbf{Im}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R})$ замість $\mathbf{Im}(\mathbf{R})$[1]. Наступна лема уточнює залежність значень операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ від множини-параметра.

Лема 3.3 (про залежність значень операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ від множини-параметра). Нехай відношення $\mathbf{R}$ та множини $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}'$ такі, що $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{E}\times\mathbf{F}$ та $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}'$; тоді $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = 0$ та $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$. □

Доведення. Так як $\mathbf{R}[x] = \varnothing$ для всіх $x \in \mathbf{E}' \setminus \mathbf{E}$, то, очевидно, що $\mathbf{Im}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \mathbf{Im}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) \bigcup \{0\}$; тобто множина $\mathbf{Im}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R})$ поповнюється найменшим елементом відповідної решітки. Зрозуміло, що таке поповнення не впливає на супремум множини (якщо казати більш точно: треба спиратися на те, що

[1] Якщо казати точно, то треба розглядати і бінарне відношення разом з відповідними множинами, з яких обираються компоненти пар відношення.

$\mathbf{Im_E(R)}$ є конфінальною підмножиною множини $\mathbf{Im_{E'}(R)}$, супремуми таких множин співпадають, див., наприклад, [2]) та призводить до нульового значення інфімуму: $\coprod \mathbf{Im_{E'}(R)} = \coprod \mathbf{Im_E(R)}$, $\prod \mathbf{Im_{E'}(R)} = 0$. Залишається застосувати рівності (1). □

Отже, власне розширення множини-параметра $\mathbf{E}$ впливає тільки на значення оператора $\mathbf{min}$, яке з можливо ненульового становиться нульовим. Зауважимо, що розширення множини $\mathbf{F}$ взагалі не впливає на значення операторів.

Наступна лема розглядає випадок, коли відношення має структуру об'єднання попарно сумісних відношень (сумісність $\approx$ – в розумінні [2], тобто в позначеннях цієї роботи $\mathrm{U} \approx \mathrm{V} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{U}|\mathrm{X} = \mathrm{V}|\mathrm{X}$, де $\mathrm{X} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathrm{U} \cap \pi_1^2\mathrm{V}$ – перетин проекцій вихідних бінарних відношень U, V за першою компонентою, а $\mathrm{U}|\mathrm{X}, \mathrm{V}|\mathrm{X}$ – обмеження бінарних відношень за вказаною множиною; змістовно кажучи, сумісні відношення на спільних елементах з перетину проекцій за першою компонентою ведуть себе однаково).

В наступній лемі виражаються значення операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на вихідній множині через значення тих самих операторів (з модифікованими множинами-параметрами) на множинах з об'єднання.

Лема 3.4 (про об'єднання попарно сумісних відношень). Нехай відношення $\mathbf{R}$ таке, що $\mathbf{R} = \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathbf{R}_\mathrm{i}$, причому всі відношення $\mathbf{R}_\mathrm{i}$, $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ попарно сумісні та непорожні, тобто $\mathbf{R}_\mathrm{i} \approx \mathbf{R}_\mathrm{j}$ для всіх $\mathrm{i}, \mathrm{j} \in \mathrm{I}$[1]. Тоді $\mathbf{max_E(R)} = \coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_\mathrm{i}}(\mathbf{R}_\mathrm{i})$, де множини $\mathbf{E}, \mathbf{E}_\mathrm{i}$, такі, що $\pi_1^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}$, $\pi_1^2(\mathbf{R}_\mathrm{i}) \subseteq \mathbf{E}_\mathrm{i}$ для всіх $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Крім того, позначаючи проекції по першій компоненті відношень

[1] Зауважимо, що з огляду на рефлексивність відношення сумісності нема потреби вимагати нерівність вказаних індексів.

$\mathbf{R}$ та $\mathbf{R}_i$ через $\mathbf{G}$ та $\mathbf{G}_i$ для всіх $i \in I$ відповідно, маємо рівність $\mathbf{min}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \prod_{i\in I} \mathbf{min}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i)$. □

Доведення починається з встановлення допоміжної рівності

$$\mathbf{R}[x] = \mathbf{R}_i[x] \text{ для всіх } i \in I \text{ та } x \in \mathbf{G}_i. \tag{3.2}$$

Фіксується довільне $i \in I$ та елемент $x \in \mathbf{G}_i$. Включення $\mathbf{R}[x] \supseteq \mathbf{R}_i[x]$ випливає з монотонності повного образу [6, твердження 2, п. 1] і залишається встановити обернене включення. Робиться це безпосередньо: нехай $y \in \mathbf{R}[x]$; оскільки повний образ є дистрибутивним відносно об'єднань [6, твердження 2, п. 2], то існує індекс $j \in I$, такий, що $y \in \mathbf{R}_j[x]$. Залишається врахувати, по-перше, сумісність відношень $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_j$, по-друге, належність $x \in \mathbf{G}_j$, тобто $x \in \mathbf{G}_j \cap \mathbf{G}_i = \pi_1^2(\mathbf{R}_j) \bigcap \pi_1^2(\mathbf{R}_i)$ та наступну загальнозначну властивість відношення сумісності $U \approx V \Leftrightarrow U[x] = V[x]$ для всіх $x \in \pi_1^2(U) \bigcap \pi_1^2(V)$ (яка випливає безпосередньо з означення сумісності).

Отже, $y \in \mathbf{R}_j[x] = \mathbf{R}_i[x]$. Включення $\mathbf{R}[x] \subseteq \mathbf{R}_i[x]$ встановлене, а з ним встановлена і шукана рівність $\mathbf{R}[x] = \mathbf{R}_i[x]$. ▫

Тепер встановлюється рівність

$$\mathbf{Im}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{Im}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i), \tag{3.3}$$

яка випливає з ланцюжка рівностей:

$$\mathbf{Im}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \{| \mathbf{R}[x] \| x \in \mathbf{G}\} = \bigcup_{i\in I}\{| \mathbf{R}[x] \| x \in \mathbf{G}_i\} = \bigcup_{i\in I}\{| \mathbf{R}_i[x] \| x \in \mathbf{G}_i\} = \bigcup_{i\in I} \mathbf{Im}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i).$$

Перша рівність ланцюжка випливає з означення множини $\mathbf{Im}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R})$, друга – з рівності $\mathbf{G} = \bigcup_{i\in I} \mathbf{G}_i$ (яка в свою чергу випливає з рівності $\mathbf{R} = \bigcup_{i\in I} \mathbf{R}_i$ та дистрибутивності проекції відносно об'єднань), третя – з раніше встановленої допоміжної рівності (2), нарешті, четверта, остання рівність – з означення множини $\mathbf{Im}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i)$. ▫

Тепер встановлюється рівність $\mathbf{min}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \prod_{i \in I} \mathbf{min}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i)$. Дійсно, з рівності (3) та відомого твердження про точні грані об'єднання підмножин частково-впорядкованої множини (див., наприклад, [38, § 1, теорема 9]) випливають рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \prod \mathbf{Im}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \prod \{\prod \mathbf{Im}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i) \mid i \in I\} = \prod_{i \in I} \mathbf{min}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i)$. ▫

Далі встановлюється друга шукана рівність $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \coprod_{i \in I} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i)$. Рівність для супремумів $\mathbf{max}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \coprod_{i \in I} \mathbf{max}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i)$ доводиться повністю аналогічно встановленій рівності для інфімумів. Залишається врахувати включення $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{E}$, $\mathbf{G}_i \subseteq \mathbf{E}_i$ для всіх $i \in I$ та застосувати лему 3 про залежність значень операторів від множини-параметра:

$$\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}) = \coprod_{i \in I} \mathbf{max}_{\mathbf{G}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod_{i \in I} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i). \ ▫ \ \square$$

Всі варіанти значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на відношеннях $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^{-1}$ наведені в таблиці 4, рядки якої відповідають вихідному відношенню $\mathbf{R}$, а стовпчики – оберненому відношенню $\mathbf{R}^{-1}$.

Ця таблиця будувалась з урахуванням леми 1 про властивості операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$. Далі розглядається структура рядків. Перші два рядки відповідають випадку, коли значення операторів співпадають, решта рядків (з третього по шостий) – випадку, коли значення оператора $\mathbf{max}$ строго більше значення оператора $\mathbf{min}$. В цій таблиці випадки, коли значення оператора $\mathbf{max}$ дорівнює ∞, вказані явно; отже нерівність $p \geq p'$ означає, що не тільки p', а і p натуральне число.

В свою чергу для першого рядка значення операторів нульові, для другого рядка (співпадаючі) значення операторів є ненульовим натуральним числом.

Для третього та четвертого рядків значення оператора $\mathbf{min}$ нульове, значення оператора $\mathbf{max}$ в третьому рядку є ненульовим натуральним числом, а в четвертому рядку значення оператора $\mathbf{max}$ є ∞.

Таблиця 3.4

Всі варіанти значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ для відношень $\mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$ та сумісність їх значень

			$p' \overset{def}{=} \mathbf{min}(\mathbf{R}^{-1}),\ p \overset{def}{=} \mathbf{max}(\mathbf{R}^{-1})$					
			$p'=0$, $p=0$	$p'=p$, $p'>0$	$p'=0$, $p\geq 1$, $p\in N$	$p'=0$, $p=\infty$	$p'\geq 1$, $p>p'$, $p\in N$	$p'\geq 1$, $p=\infty$
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$k' \overset{def}{=} \mathbf{min}(\mathbf{R})$, $k \overset{def}{=} \mathbf{max}(\mathbf{R})$	$k'=0$, $k=0$	(1)	+	–	–	–	–	–
	$k'=k$, $k'>0$	(2)	–	+	+	+	+	+
	$k'=0$, $k\geq 1$, $k\in N$	(3)	–	+	+	+	+	+
	$k'=0$, $k=\infty$	(4)	–	+	+	+	+	+
	$k'\geq 1$, $k>k'$, $k\in N$	(5)	–	+	+	+	+	+
	$k'\geq 1$, $k=\infty$	(6)	–	+	+	+	+	+

Нарешті, для п’ятого та шостого рядків значення оператора $\mathbf{min}$ ненульове, значення оператора $\mathbf{max}$ в п’ятому рядку є натуральним числом, строго більшим за значення оператора $\mathbf{min}$, а в шостому рядку значення оператора $\mathbf{max}$ є ∞.

Структура стовпців повністю аналогічна. Наявність саме такої структури таблиці дозволяє зробити два очевидних висновки: по-перше, заповнення комірок таблиці (яке саме заповнення – про це йдеться в подальшій теоремі) буде симетричним відносно головної діагоналі; по-друге, в таблиці присутні всі можливі варіанти значень операторів на вихідному та оберненому відношеннях.

Наступна теорема відповідає на питання сумісності значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на вихідному (початковому) відношенні та на оберненому до нього відношенні.

Теорема 3.1 (про сумісність значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на взаємоінверсних відношеннях). Для комірок таблиці 4, позначених “+” (“–”), існують (відповідно не існують) відношення $\mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$ з відповідними значеннями операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$. □

Доведення полягає у розгляді 21 випадку для всіх комірок таблиці 4, розташованих на головній діагоналі та вище неї; воно наведене у додатку Б. □

З цієї теореми випливає, що, за винятком спеціального випадку порожнього відношення (дійсно, при $\mathbf{R} = \varnothing$ відношення $\mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$ просто співпадають), немає логічного зв’язку між значеннями операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на вихідному та оберненому відношеннях; більш точно: для довільного розподілу значень операторів[1] існує відношення, на якому ці значення досягаються. Причина такого положення полягає в тому, що повні образи одноелементних множин несуть не просто локальну інформацію про відношення, а локальну числову інформацію.

Розглянемо це питання більш докладно. Добре відомий логічний зв’язок між відношенням та відношенням, оберненим до нього: відношення функціонально (ін’єктивно) тоді і тільки тоді, коли обернене відношення ін’єктивно (відповідно функціонально). Цей простий факт відмічений, наприклад, в [6, твердження 1].

З п. 9 леми 1 випливає, що функціональність виражається через значення оператора max. Покажемо, що для ін’єктивності ситуація принципово інша: на

[1] Звісно, розглядаються тільки такі розподіли, в яких значення оператора $\mathbf{max}$ не менше ніж значення оператора $\mathbf{min}$ (на тому самому відношенні).

рисунку 2 наведені приклади ін'єктивного та неін'єктивного відношень, на яких оператори **max**, **min** мають однакові значення (а саме 2).

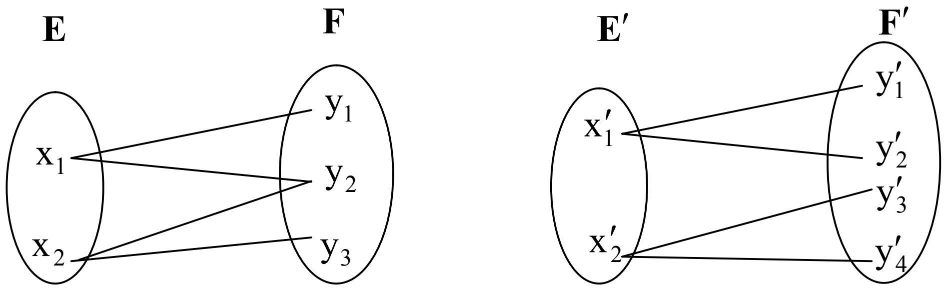


Рис. 3.2. Приклад ін'єктивного (справа) та неін'єктивного (зліва) відношень, на яких оператори $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ мають однакові значення

Практичний результат даної теореми полягає у тому, що при побудові бінарного типу зв'язку (який містить принаймні один зв'язок) та накладанні на нього min та max обмежень простої кардинальності, змістовно кажучи „з двох боків", не існує логічного зв'язку між значеннями даних обмежень (див. попередній рисунок 1).

Після розгляду базових типів обмеження кардинальності для бінарних типів зв'язків можна зробити висновок: min та max обмеження простої необмеженої кардинальності є найпотужнішими (найвиразнішими) серед всіх розглянутих обмежень кардинальності; це випливає з таблиць 1-3.

3.3. Обмеження кардинальності багатосторонніх типів зв'язків

В даному підрозділі розглядаються базові типи двох найуживаніших видів обмежень кардинальності багатосторонніх типів зв'язків.

3.3.1. Кардинальність „дивитися через"

Кардинальність „дивитися через" – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутності), яке залежить від зв'язків типу зв'язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать решті типів сутностей даного типу зв'язку.

Далі розглядаються базові типи обмеження кардинальності „дивитися через" для n-арних типів зв'язків, $n \geq 2$.

Min обмеження кардинальності („*дивитися через*”) базується на мінімальній кількості зв’язків типу зв’язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать відповідно $(n-1)$ типу сутностей даного типу зв’язку.

Характеристична ознака значень min обмеження кардинальності („дивитися через”, обмежена кардинальність): для типу зв’язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення „*один*” *min обмеження кардинальності* („*дивитися через*”) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, з’єднується (типом зв’язку R) щонайменше з однією сутністю типу сутності E_i.

В протилежному випадку *min обмеження кардинальності* („*дивитися через*”) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ має *значення* „*нуль*”, тобто існує така комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, що не з’єднується (типом зв’язку R) з будь-якою сутністю типу сутності E_i [83, с. 13] (тобто ця комбінація сутностей взагалі не приймає участь у зв’язках).

Данне поняття можна уточнити за допомогою проекції відношення. Необхідно зазначити, що в літературі існують різні підходи до визначення проекції відношення, див., наприклад, [15, гл. 2, с. 44; 18, част. II, гл. 6, с. 203; 41, с 28].

В даній роботі використовується проекція відношення за $1,...,i-1,i+1,...,n$ компонентами $\pi^n_{1,...,i-1,\,i+1,...,n}(\mathbf{R})$, що визначається наступним чином

$$\pi^n_{1,...,i-1,\,i+1,...,n}(\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \{< e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n > \mid \exists e_i \,(< e_1, ..., e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, ..., e_n > \in \mathbf{R})\}.$$

В подальшому дана проекція називається *проекцією першого роду за* i-*тою компонентою відношення* та позначається через ${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R})$ (змістовно кажучи, в кортежах відношення ${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R})$ вилучені i-ті компоненти).[1]

Шукане уточнення значень min обмеження кардинальності наступне: значення min обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{n}}$ у типі зв’язку R „один”, якщо виконується рівність ${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}-1} \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}+1} \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{n}}$; якщо ж виконується строге включення ${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}-1} \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}+1} \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{n}}$, то значення min обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{n}}$ у типі зв’язку R „нуль”.

Таблиця 3.5

Взаємозв’язок між значеннями min обмеження кардинальності („дивитися через”) та проекцією відношення

Проекція відношення	**Min обмеження кардинальності („дивитися через”)**
${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}-1} \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}+1} \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{n}}$	min обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{n}}$ у типі зв’язку R „один”
${}^{1}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}-1} \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}+1} \times ... \times \mathbf{E}_{\mathrm{n}}$	min обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{n}}$ у типі зв’язку R „нуль”

Max обмеження кардинальності („*дивитися через*”) базується на максимальній кількості зв’язків типу зв’язку для будь-якої комбінації сутностей, що належать відповідно $(\mathrm{n}-1)$ типу сутностей даного типу зв’язку.

---

[1] Далі буде розглядатися і проекція другого роду.

Характеристична ознака значень max обмеження кардинальності („дивитися через”, обмежена кардинальність): для типу зв’язку R між типами сутностей $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_i, ..., \mathrm{E}_n$ значення *„один” max обмеження кардинальності* (*„дивитися через”*) *для типів сутностей* $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{E}_{i+1}, ..., \mathrm{E}_n$, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{E}_{i+1}, ..., \mathrm{E}_n$, з’єднується (типом зв’язку R) не більше ніж з однією сутністю типу сутності E_i.

В протилежному випадку *max обмеження кардинальності* (*„дивитися через”*) *для типів сутностей* $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{E}_{i+1}, ..., \mathrm{E}_n$ має *значення „багато”*, тобто існує комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{E}_{i+1}, ..., \mathrm{E}_n$, що з’єднується (типом зв’язку R) з декількома сутностями типу сутності E_i. [113, с. 201].

Взаємозв’язок між значеннями max обмеження кардинальності бінарного типу зв’язку і властивостями функціональності відповідного бінарного відношення (точніше властивостями функціональності вихідного бінарного відношення та оберненого до нього відношення) був розглянутий у підрозділі 3.2.1. В цьому пункті робиться узагальнення і знаходиться взаємозв’язок між значеннями max обмеження кардинальності („дивитися через”) n-арного типу зв’язку і властивостями функціональності відповідного n-арного відношення.

Для цього розглядається поняття *функціональності* n-*арного відношення* $\mathbf{R}$ *за* i-*компонентою* ($i = 1, 2, ..., n$).

Відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ називається *функціональним за* i-*тою компонентою*, де $i = 1,2,...,n$, якщо для будь-якої послідовності елементів $< e_1, e_2, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n > \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$ множина всіх елементів $e_i \in \mathbf{E}_i$, для яких виконується належність $< e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n > \in \mathbf{R}$, містить не більше одного елемента [15, гл. 2, с. 45].

Отже, функціональність бінарного відношення за другою компонентою це (стандартна) функціональність, а функціональність бінарного відношення за першою компонентою це (стандартна) функціональність відношення, оберненого до первісного відношення; отже, враховуючи зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю для бінарних відношень (див., наприклад, [6, твердження 1]), маємо, що функціональність бінарного відношення за першою компонентою це його ін'єктивність.

Поняття функціональності n-арного відношення за компонентою можна звести до функціональності певного похідного бінарного відношення. Для цього n-арне відношення $\mathbf{R}$ представляється у вигляді бінарного відношення вигляду $^1\mathbf{R}_i \subseteq (\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n) \times \mathbf{E}_i$ для $i = 1,2,\ldots,n$, де

$$^1\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} \{<< e_1,\ldots,e_{i-1,} e_{i+1},\ldots,e_n >, e_i > | < e_1,\ldots,e_{i-1,} e_i, e_{i+1},\ldots,e_n > \in \mathbf{R}\}.$$

Тобто першою компонентою пари відношення $^1\mathbf{R}_i$ є кортеж довжини $(n-1)$, елементи якого належить відповідно множинам $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, \ldots, \mathbf{E}_n$, а другою компонентою – елемент множини $\mathbf{E}_i$; змістовно кажучи, в відношенні $^1\mathbf{R}_i$ i-та компонента переставляється на останнє n-те місце, а решта $(n-1)$ компонент групується в кортеж.

Причина саме такого перетворення первісного відношення очевидна: при розгляді функціональних бінарних відношень перші компоненти пар традиційно розглядаються як аргументи, а другі компоненти пар – як значення (відношення) на аргументах.

Випадок, коли вихідне відношення $\mathbf{R}$ бінарне, потребує деяких пояснень: якщо одноелементний кортеж ототожнювати з самим елементом (тобто кортеж $< e >$ з елементом e), тоді отримуються рівності

$$^1\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}^{-1},\ ^1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}. \qquad (3.4)$$

Очевидно, що n-арне відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$ є функціональним за i-тою компонентою тоді і тільки тоді, коли бінарне відношення $^1\mathbf{R}_i$ функціональне.

Розглядаючи max обмеження кардинальності для бінарного типу зв'язку, очевидний зв'язок між уточненнями відповідних обмежень, проведених за допомогою функціональності вихідного бінарного відношення і оберненого до нього, та функціональністю за i-компонентою ($i = 1, 2$): функціональність бінарного відношення **R** це функціональність відношення **R** за 2-ою компонентою, а функціональність відношення $\mathbf{R}^{-1}$ це функціональність відношення **R** за 1-ою компонентою. Таблицю 2 можна представити наступним чином (таблиця 6).

Таблиця 3.6

Взаємозв'язок між max обмеження кардинальності (простої, обмежена кардинальність) і функціональністю відношення за компонентою

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Функціональність відношення R за 2-ою компонентою</td></tr>
<tr><td>R функціональне за 2-ою комплонентою</td><td>R не функціональне за 2-ою компонентою</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Функціо-нальність відношення R за 1-ою компонент-тою</td><td>R функціональне за 1-ою комплонентою</td><td>R – „один до одного”, (1:1)</td><td>R – „багато до одного”, (M:1), який направлений від F до E
R – „один до багатьох”, (1:M), який направлений від E до F</td></tr>
<tr><td>R не функціональне за 1-ою компонентою</td><td>R – „багато до одного”, (M:1), який направлений від E до F
R – „один до багатьох”, (1:M), який направлений від F до E</td><td>R – „багато до багатьох”, (M:N)</td></tr>
</table>

У подальшому функціональність n-арного відношення за i-компонентою називається *функціональністю першого роду за* і-*тою компонентою*.[1]

Уточнення поняття max обмеження кардинальності („дивитися через", обмежена кардинальність) за допомогою функціональності відношення: тип зв'язку R має значення „один" max обмеження кардинальності („дивитися через") для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, де $i = 1,2,...,n$, якщо відповідне відношення **R** є функціональним першого роду за і-тою компонентою; відповідно, тип зв'язку R має значення „багато" max обмеження кардинальності („дивитися через") для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, якщо відповідне відношення **R** не є функціональним першого роду за і-тою компонентою.

Mop обмеження кардинальності „дивитися через" (*Mandatory/Optional participation look across cardinality constraint*) – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), що показує чи повинен входити в тип зв'язку мінімум один зв'язок для будь-якої комбінації сутностей, що належать відповідним $(n-1)$ типам сутностей даного типу зв'язку.

Розглядаючи поняття mop обмеження кардинальності, слід зауважити, що не має чіткого означення та, відповідно, уточнення даного поняття. Тому під час розгляду mop обмеження кардинальності, будуть розглянуті деякі особливості даного поняття, які явно не вказуються в літературі.

Характеристична ознака значень mop обмеження кардинальності („дивитися через") така: якщо будь-яка комбінація сутностей $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$, що належать відповідно $(n-1)$ типам сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ даного типу зв'язку, де $i = 1,2,...,n$, знаходиться принаймні в одному зв'язку згідно типу зв'язку R (з деякою сутністю типу сутності E_i), то значення *mop обмеження кардинальності* (**„***дивитися через*") *типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R *обов'язкове*; якщо ж може

[1] Далі буде розглядатися і функціональність другого роду.

існувати комбінація сутностей $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$, яка не знаходяться у зв'язку типу зв'язку R з довільною сутністю типу сутності E_i (тобто ця комбінація не присутня в жодному зв'язку типу зв'язку R), то значення *mор обмеження кардинальності* („*дивитися через*”) *типів сутностей* $E_1,\ ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R *необов'язкове*.

Випадок, коли вихідне відношення $\mathbf{R}$ бінарне, потребує деяких пояснень. Як і раніше, будемо одноелементний кортеж ототожнюється з самим елементом, тоді отримуються рівності

$$^1\pi_1^2(\mathbf{R}) = \pi_2^2(\mathbf{R}),\ ^1\pi_2^2(\mathbf{R}) = \pi_1^2(\mathbf{R}), \tag{3.5}$$

де $\pi_i^2(\mathbf{R})$ для $i = 1,2$ – (стандартна) проекція бінарного відношення за i-тою компонентою.

Таблиця 3.7

Взаємозв'язок між значеннями mор обмеження кардинальності („дивитися через”) та проекцією відношення

Проекція відношення	**Mор обмеження кардинальності („дивитися через”)**
$^1\pi_i^n(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$	mор обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $E_1,\ ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R обов'язкове
$^1\pi_i^n(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$	mор обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $E_1,\ ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R необов'язкове

Шукане уточнення значень mор обмеження кардинальності наступне: значення mор обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $E_1,\ ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R обов'язкове, якщо виконується рівність

${}^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$; якщо ж виконується включення ${}^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$, то значення *min* обмеження кардинальності „дивитися через” типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв’язку R необов’язкове. Отже, згідно цього уточнення у випадку виконання рівності ${}^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$, значення *min* обмеження кардинальності є (формально) одночасно обов’язковим та необов’язковим.

Зауважимо, що, як виплаває з означення проекції, включення ${}^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$ виконується завжди; отже, якщо про тип зв’язку (про відповідне відношення) нема ніякої додаткової інформації, то значення *min* обмеження кардинальності необов’язкове.

Як зазначалось вище, не має чіткого означення (та уточнення) поняття *min* обмеження кардинальності. Неоднозначність тлумачень виникає під час розгляду характеристичної ознаки необов’язкового значення *min* обмеження кардинальності („дивитися через”): питання полягає в можливості існування чи точного існування комбінації сутностей $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$, яка не знаходяться у зв’язку (типу зв’язку R) з довільною сутністю типу сутності E_i. У випадку можливості існування проектант просто може не мати даної інформації, а у випадку точного існування – інформація відома. При уточненні другого випадку, необхідно використовувати строге включення ${}^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$ і значення *min* обмеження кардинальності („дивитися через”) типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв’язку R буде необов’язкове.[1]

Між розглянутими значеннями обмежень кардинальності існують прості логічні зв’язки.

---

[1] Дані зауваження стосуються *min* обмеження кардинальності незалежно від варіанту обмеження кардинальності (обмеження кардинальності „дивитися через” або обмеження кардинальності участі).

Твердження 3.1 (зв'язок між значеннями min та mop обмеження кардинальності для підходу „дивитися через"). Якщо значення min обмеження кардинальності („дивитися через") для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R є „нуль", то значення mop обмеження кардинальності („дивитися через") типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R необов'язкове. Обернена імплікація, взагалі кажучи, не виконується.

Значення min обмеження кардинальності („дивитися через") для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R є „один" тоді і тільки тоді, коли, mop обмеження кардинальності („дивитися через") типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R обов'язкове. □

Доведення даного твердження безпосередньо випливає з означень min та mop обмеження кардинальності для підходу „дивитися через" та відповідних уточнень: див. таблиці 5 та 7. □

Різниця в уточненні даних понять пояснює відсутність еквівалентності між значенням min обмеження кардинальності („дивитися через") „нуль" і значенням mop обмеження кардинальності („дивитися через") необов'язкове. Так, розглядаючи значення відповідних обмежень кардинальності для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ у типі зв'язку R отримуються наступні уточнення: ${}^1\pi_i^n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$ (уточнення значення min обмеження кардинальності („дивитися через") „нуль") і ${}^1\pi_i^n(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$ (уточнення значення mop обмеження кардинальності („дивитися через") необов'язкове). Очевидно, що перша умова більш сильна ніж друга (тобто з першої випливає друга, але не навпаки).

Далі розглядається необмежена кардинальність для підходу „дивитися через".

Характеристична ознака значень min обмеження кардинальності („дивитися через", необмежена кардинальність): для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ *значення* n, $n \geq 0$, *min обмеження* *кардинальності* (*„дивитися через”*) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, з’єднується (типом зв’язку R) щонайменше з n сутностями типу сутності E_i; причому існує така комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, що з’єднується в точності з n сутностями типу сутності E_i (випадок $n = 0$ означає, що існує така комбінація сутностей, яка не приймає взагалі участь у зв’язку, тобто не з’єднується з жодною сутністю типу сутності E_i).[1]

Характеристична ознака значень max обмеження кардинальності („дивитися через”, необмежена кардинальність): для типу зв’язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ *значення* n, $n \geq 0$, *max обмеження кардинальності* (*„дивитися через”*) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, з’єднується (типом зв’язку R) щонайбільше з n сутностями типу сутності E_i; причому існує така комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, що з’єднується в точності з n сутностями типу сутності E_i (особливий випадок $n = 0$ означає, що будь-яка комбінація сутностей взагалі не приймає участь у зв’язку, тобто тип зв’язку порожній).[2]

Для типу зв’язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *„багато” max обмеження кардинальності* (*„дивитися через”*) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ означає, що для будь-якого натурального числа n існує така комбінація сутностей, які вибрані з відповідних типів

[1] Змістовно кажучи, мова йде не тільки про певну нижню оцінку, але і про її досяжність.
[2] Змістовно кажучи, мова знову йде не тільки про певну верхню оцінку, але і про її досяжність.

сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, що з'єднується (типом зв'язку R) з m сутностями типу сутності E_i, причому $m > n$.

Min та max обмеження кардинальності („дивитися через") для необмеженої кардинальності можна уточнити за допомогою поняття повного образу одноелементних множин аналогічно випадку бінарних типів зв'язків (проста кардинальність).

Як і раніше n-арне відношення $\mathbf{R}$ представляється у вигляді бінарного відношення ${}^1\mathbf{R}_i$.

Повний образ одноелементної множини $\{< e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n >\}$ відносно відношення ${}^1\mathbf{R}_i$ позначається через ${}^1\mathbf{R}_i[e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n]$; згідно з означеннями повного образу та відношення ${}^1\mathbf{R}_i$ маємо рівність ${}^1\mathbf{R}_i[e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n] = \{e_i \mid < e_1,...,e_{i-1},e_i,e_{i+1},...,e_n > \in \mathbf{R}\}$,тобто повний образ в лівій частині співпадає з множиною всіх елементів множини $\mathbf{E}_i$, які знаходяться у відношенні $\mathbf{R}$ з елементами $e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n$.

Уточнювати min та max обмеження кардинальності („дивитися через") для необмеженої кардинальності можна і за допомогою поняття розтину. Очевидно, що поняття повного образу і розтину взаємопов'язані.

Так, *розтином* (рос. „сечением") $\mathbf{S}^i_{e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n}(\mathbf{R})$ n-арного відношення $\mathbf{R}$ по елементам $e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n$ (точніше кажучи, по послідовності вказаних елементів, бо порядок елементів суттєвий) називається множина всіх елементів $e_i \in \mathbf{E}_i$, для яких $(e_1,...,e_{i-1},e_i,e_{i+1},...,e_n) \in \mathbf{R}$, тобто $\mathbf{S}^i_{e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n}(\mathbf{R}) = \{e_i \,|\, (e_1,...,e_{i-1},e_i,e_{i+1},...,e_n) \in \mathbf{R}\}$ (див., наприклад, [15, гл. 2, с. 45-46]). Очевидно, що $\mathbf{S}^i_{e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n}(\mathbf{R}) = {}^1\mathbf{R}_i[e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n]$.

Як і для бінарного випадку покладається, що всі множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_i, ..., \mathbf{E}_n$ не більш ніж злічені, а всі повні образи одноелементних множин (кортежів) скінченні; з огляду на фінітність всіх об'єктів такі обмеження є природними.

Фіксується деяке $i=1,...,n$, всі множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ вважаються непорожніми.

Непорожня множина потужностей повних образів всіх комбінацій елементів множин $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$, позначається як

$$^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \{\left|{}^1\mathbf{R}_i[e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n]\right\| e_1 \in \mathbf{E}_1 \wedge ... \wedge e_{i-1} \in \mathbf{E}_{i-1} \wedge e_{i+1} \in \mathbf{E}_{i+1} \wedge ... \wedge e_n \in \mathbf{E}_n\}.$$

Зрозуміло, що непорожність всіх множин $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$ є необхідною і достатньою умовою для непорожності множини $^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$.

Також зрозуміло, що $^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ – непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-якому випадку ця множина має найменший елемент, якій позначино як $^1\mathbf{min}_i(\mathbf{R})$.

Найбільшого ж елементу множина $^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ може і не мати, тому вводиться наступне означення, в якому ∞ – деякий елемент, що не належить множині натуральних чисел:

$$^1\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } {}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}), \text{ якщо } {}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}) \text{ скінченна} \\ \text{множина;} \\ \infty, \quad \text{інакше.} \end{cases}.$$

Тобто по суті проводиться поповнення множини натуральних чисел N з стандартним порядком $\leq$ (умовно повної решітки) найбільшим елементом ∞ та її перетворення в повну решітку $< N', \leq >$, де $N' \overset{\text{def}}{=} N \cup \{\infty\}$, причому $n < \infty$ для всіх $n \in N$ [1, гл. V, § 3, с. 153-154].

Безпосередньо з означень випливають рівності

$$^1\mathbf{min}_i(\mathbf{R}) = \prod {}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}),\ {}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = \coprod {}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}), \tag{3.6}$$

де символи $\prod, \coprod$, як і раніше в рівностях (1), використовуються відповідно для позначення інфімумів та супремумів в повній решітці N'.

Для виконання рівностей (6) також суттєва непорожність множин $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$, бо саме з непорожності множин $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$ випливає непорожність числової множини ${}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$, а зазначені рівності для порожньої множини ${}^1\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ згідно з стандартними домовленостями щодо точних граней порожньої множини приймають вигляд ${}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{R}) = \infty$, ${}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = 0$ (супремум порожньої множини співпадає с найменшим елементом, а інфімум – з найбільшим; див., наприклад, [2]; зауважимо також, що, коли хоча б одна з множин $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{i-1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$ порожня, то порожнє і відношення $\mathbf{R}$).

Зрозуміло, що розумно інтерпретувати дві останні рівності важко.

Відповідне уточнення проводиться так:

– для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *min обмеження кардинальності* („*дивитися через*”) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ покладається рівним ${}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{R})$;

– для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *max обмеження кардинальності* („*дивитися через*”) *для типів сутностей* $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ покладається рівним ${}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{R})$.

3.3.2. Кардинальність участі

Для підходу Меріса, як і для підходу Чена, базові типи обмеження кардинальності є параметричними (параметром виступає тип сутності) і визначаються на основі зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності, що належить типу-параметру.

Далі розглядаються базові типи обмеження кардинальності для кардинальності участі.

Min обмеження кардинальності (*участі*) базується на мінімальній кількості зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності, що належить типу сутності даного типу зв'язку, який (тип) виступає параметром.

Характеристична ознака значень min обмеження кардинальності (кардинальність участі, обмежена кардинальність): для типу зв'язку R між типами сутностей $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_\mathrm{i}, ..., \mathrm{E}_\mathrm{n}$ *значення „один" min обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i, де $\mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{n}$, означає, що будь-яка сутність, яка належить типу сутності E_i, з'єднується (типом зв'язку R) щонайменше з однією комбінацією сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_\mathrm{n}$.

В протилежному випадку *min обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i має *значення „нуль"*, тобто існує така сутність, яка належить типу сутності E_i і не з'єднується (типом зв'язку R) з будь-якою комбінацією сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{E}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{E}_\mathrm{n}$ (тобто ця сутність взагалі не приймає участь у зв'язках).

Уточнити дане поняття можна, як і раніше, за допомогою проекції відношення. Нехай $\pi_\mathrm{i}^\mathrm{n}(\mathbf{R})$ – (стандартна) проекція n-арного відношення за i-тою компонентою, що визначається рівністю $\pi_\mathrm{i}^\mathrm{n}(\mathbf{R}) = \{\mathrm{e_i} \mid \exists \mathrm{e}_1 \ ... \exists \mathrm{e}_{\mathrm{i}-1} \ \exists \mathrm{e}_{\mathrm{i}+1} \ ... \exists \mathrm{e}_\mathrm{n} (< \mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{e}_\mathrm{i}, \mathrm{e}_{\mathrm{i}+1}, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n} > \in \mathbf{R})\}$.

В подальшому дана проекція називається *проекцією другого роду за* i*-тою компонентою відношення* та позначається через ${}^2\pi_\mathrm{i}^\mathrm{n}(\mathbf{R})$ (нагадаймо, що в проекції першого роду i-та компонента вилучалась; в введеній ж проекції другого роду, навпаки, i-та компонента залишається).

Для бінарних відношень проекції першого та другого роду пов'язані рівностями (звісно, за умови ототожнення одноелементних кортежів з самими компонентами).

$$ {}^1\pi_1^2(\mathbf{R}) = {}^2\pi_2^2(\mathbf{R}), \ {}^1\pi_2^2(\mathbf{R}) = {}^2\pi_1^2(\mathbf{R}). \tag{3.7} $$

Таблиця 3.8

Взаємозв'язок між значеннями min обмеження кардинальності (участі) та проекціями відношення

Проекція відношення	Min обмеження кардинальності (кардинальність участі)
${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i$	min обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R „один"
${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_i$	min обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R „нуль"

Шукане уточнення значень min обмеження кардинальності наступне: значення min обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R „один", якщо виконується рівність ${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i$; якщо ж виконується строге включення ${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_i$, то значення min обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R „нуль" (див. таблицю 8).

Max обмеження кардинальності (*участі*) базується на максимальній кількості зв'язків типу зв'язку для будь-якої сутності, що належить типу сутності даного типу зв'язку, який (тип) виступає параметром.

Характеристична ознака значень max обмеження кардинальності (участі, обмежена кардинальність): для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ *значення „один" max обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка сутність, яка належить типу сутності E_i, з'єднується (типом зв'язку R) не більше ніж з однією комбінацією сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$.

В протилежному випадку *max обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i має *значення „багато"*, тобто існує така сутність, яка належить типу сутності E_i і з'єднується (типом зв'язку R) з декількома (різними) комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$.

Як і для кардинальності „дивитися через” (що розглядалась в п. 3.3.1) значення max обмеження кардинальності (участі, обмежена кардинальність) можна звести до перевірки функціональності відповідного похідного бінарного відношення.

Для цього n-арне відношення $\mathbf{R}$ представляється у вигляді бінарного відношення ${}^2\mathbf{R}_i \subseteq \mathbf{E}_i \times (\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i\text{-}1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n)$,

де ${}^2\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} \{\langle e_i, < e_1, ..., e_{i-1,} e_{i+1}, ..., e_n >\rangle \mid < e_1, ..., e_{i-1,} e_i, e_{i+1}, ..., e_n > \in \mathbf{R}\}$ (тобто першою компонентою пари відношення ${}^2\mathbf{R}_i$ є елемент множини $\mathbf{E}_i$, а другою – кортеж довжини $(n-1)$, елементи якого належать відповідно множинам $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{i\text{-}1}, \mathbf{E}_{i+1}, ..., \mathbf{E}_n$; змістовно кажучи, в новому відношенні i-та компонента переставляється на перше місце, а решта $(n-1)$ компонент групується в кортеж; ситуація дуальна до випадку кардинальності „дивитися через”).

Випадок, коли вихідне відношення $\mathbf{R}$ бінарне, потребує деяких пояснень. З означень безпосередньо випливають рівності (як і раніше за умови ототожнення одноелементних кортежів з самими елементами)

$${}^2\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}^{-1} \text{ та } {}^2\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}. \tag{3.8}$$

Відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ називається *функціональним другого роду за* i*-тою компонентою*, якщо відношення ${}^2\mathbf{R}_i$ функціональне.

Далі наведено логічні зв’язки з раніше введеним поняттям функціональності першого роду.

Безпосередньою з означень випливає рівність ${}^2\mathbf{R}_i = ({}^1\mathbf{R}_i)^{-1}$ для $i = 1, ..., n$. Таким чином, враховуючи відомий зв’язок між функціональними та ін’єктивними бінарними відношеннями (див., наприклад, попереднє посилання [6, твердження 1]), отримується еквівалентність: n-арне відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ є *функціональним другого роду за* i-*тою компонентою* тоді і тільки тоді, коли бінарне відношення ${}^1\mathbf{R}_i$ є ін'єктивним.

Вище для бінарних відношень був показаний зв'язок між, з одного боку, функціональністю першого роду за першою та другою компонентами і, з другого боку, функціональністю та ін'єктивністю (див. рівності (4): функціональність першого роду за першою компонентою це ін'єктивність, а функціональність першого роду за другою компонентою – звичайна функціональність).

Аналогічне твердження для функціональності другого роду в класі бінарних відношень формулюється так: функціональність другого роду за другою компонентою відношення співпадає з його ін'єктивністю, а функціональність другого роду за першою компонентою відношення співпадає з його (стандартною) функціональністю (див. рівності (8)).

Таким чином, можна зробити висновок, що для бінарних відношень поняття функціональності першого та другого роду є дуальними за умови, що поняття функціональності та ін'єктивністі є дуальними.

Тепер можна навести уточнення поняття max обмеження кардинальності (участі, обмежена кардинальністі): тип зв'язку R між типами сутностей $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_i, ..., \mathrm{E}_n$ має значення „один” max обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i, де $i = 1,2,...,n$, якщо відповідне відношення $\mathbf{R}$ є функціональним другого роду за і-тою компонентою; відповідно, тип зв'язку R має значення „багато” max обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i, якщо відношення $\mathbf{R}$ не є функціональним другого роду за і-тою компонентою.

Mор обмеження кардинальності (*участі*) – параметричне поняття (параметром виступає один з типів сутностей), що показує чи повинен входити в тип зв'язку мінімум один зв'язок для будь-якої сутності, що належить типу-параметру.

Характеристична ознака значень mop обмеження кардинальності (участі) така: якщо будь-яка сутність e_i, що належить типу сутності E_i даного типу зв'язку R, де $i = 1,2,...,n$, знаходиться принаймні в одному зв'язку згідно типу зв'язку R (з деякими сутностями типів сутностей $E_1,...,E_{i-1},E_{i+1}...,E_n$), то *значення mop обмеження кардинальності* (*участі*) *типу сутності* E_i у типі зв'язку R *обов'язкове*; якщо ж може існувати сутність e_i, що належить типу сутності E_i, яка не знаходяться у зв'язку типу зв'язку R з довільними сутностями типів сутностей $E_1,...,E_{i-1},E_{i+1}...,E_n$ (тобто ця сутність взагалі не присутня в жодному зв'язку типу зв'язку R), то *значення mop обмеження кардинальності* (*участі*) *типу сутності* E_i у типі зв'язку R *необов'язкове*.

Уточнити поняття mop обмеження кардинальності (участі) можна, як і раніше, за допомогою проекції відношення. В попередніх позначеннях маємо наступну таблицю.

Таблиця 3.9

Взаємозв'язок між значеннями mop обмеження кардинальності (участі) та проекціями відношення

Проекція відношення	**Mop обмеження кардинальності (кардинальність участі)**
${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i$	Значення mop обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R обов'язкове
${}^2\pi_i^n(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{E}_i$	Значення mop обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв'язку R необов'язкове

Для кардинальності участі має місце повний аналог твердження 1 (для кардинальності „дивитись через").

Твердження 3.2 (зв'язок між значеннями min та mop обмеження кардинальності для кардинальності участі). Якщо значення min обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i у типі зв'язку R є „нуль", то значення mop обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв’язку R необов’язкове. Обернена імплікація, взагалі кажучи, не виконується.

Значення min обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i у типі зв’язку R є „один” тоді і тільки тоді, коли, mop обмеження кардинальності (участі) типу сутності E_i у типі зв’язку R обов’язкове. □

Доведення аналогічне доведенню твердження 1 і випливає з таблиць 8, 9. □

Далі розглядається необмежена кардинальність для кардинальності участі.

Характеристична ознака значень min обмеження кардинальності (участі, необмежена кардинальність): для типу зв’язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ *значення* n, $n \geq 0$, *min обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка сутність, яка належить типу сутності E_i, з’єднується (типом зв’язку R) щонайменше з n комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$; причому існує така сутність, яка належить типу сутності E_i, що з’єднується в точності з n комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ (випадок $n = 0$ означає, що існує така сутність, яка не приймає взагалі участь у зв’язку, тобто не з’єднується з жодною комбінацією сутностей типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$).[1]

Характеристична ознака значень max обмеження кардинальності (участі, необмежена кардинальність): для типу зв’язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ *значення* n, $n \geq 0$, *max обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i, де $i = 1,2,...,n$, означає, що будь-яка сутність, яка належить типу сутності E_i, з’єднується (типом зв’язку R) щонайбільше з n комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$; причому існує така сутність, яка належить типу сутності

---

[1] Змістовно кажучи, мова йде не тільки про певну нижню оцінку, але і про її досяжність аналогічно кардинальності „дивитись через”.

E_i, що з'єднується в точності з n комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$ (особливий випадок $n = 0$ означає, що будь-яка сутність взагалі не приймає участь у зв'язку, тобто тип зв'язку порожній).[1]

Для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *„багато" max обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i означає, що для будь-якого натурального числа n існує така сутність, яка належить типу сутності E_i, що з'єднується (типом зв'язку R) з m комбінаціями сутностей, вибраних з відповідних типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, причому $m > n$.

Min та max обмеження кардинальності (участі) для необмеженої кардинальності, як і раніше для кардинальності „дивитись через", уточнюються за допомогою потужностей повних образів одноелементних множин.

Логічна схема повністю аналогічна випадкам бінарних типів зв'язків (п. 3.2.3) та багатосторонніх типів зв'язків для кардинальності „дивитись через" (п. 3.3.1).

Як і раніше n-арне відношення $\mathbf{R}$ представляється у вигляді бінарного відношення ${}^2\mathbf{R}_i$.

Повний образ одноелементної множини $\{e_i\}$ відносно відношення ${}^2\mathbf{R}_i$ позначається через ${}^2\mathbf{R}_i[e_i]$; згідно з означеннями виконується рівність ${}^2\mathbf{R}_i[e_i] = \{ < e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n > | < e_1,...,e_{i-1},e_i,e_{i+1},...,e_n > \in \mathbf{R}\}$ – множина всіх кортежів $< e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n >$, які знаходяться у відношенні ${}^2\mathbf{R}_i$ з елементом e_i.

[1] Змістовно кажучи, мова йде не тільки про певну верхню оцінку, але і про її досяжність аналогічно кардинальності „дивитись через".

Як і раніше вважається, що множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_i, ..., \mathbf{E}_n$ непорожні, не більш ніж злічені, а всі повні образи одноелементних множин скінченні.

Непорожня множина потужностей повних образів всіх елементів множини $\mathbf{E}_i$, позначається як ${}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \{|{}^2\mathbf{R}_i[e_i]| \mid e_i \in \mathbf{E}_i\}$. ${}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ – непорожня підмножина натуральних чисел, скінченна (тобто обмежена зверху) або нескінченна (тобто необмежена зверху). В будь-якому випадку ця множина має найменший елемент, якій позначається як ${}^2\mathbf{min}_i(\mathbf{R})$. Найбільшого ж елементу множина ${}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ може і не мати, тому покладається за означенням:

$$
{}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = \begin{cases} \text{найбільший елемент множини } {}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}), \text{якщо } {}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}) \text{ скінченна} \\ \text{множина;} \\ \infty, \quad \text{інакше.} \end{cases}
$$

Вище ∞ – деякий елемент, відмінний від всіх натуральних чисел.

Множину натуральних чисел N з стандартним порядком $\le$ (умовно повну решітку) перетворимо в повну решітку $<\mathrm{N}', \le>$ додаванням найбільшого елементу ∞, де $\mathrm{N}' \overset{\text{def}}{=} \mathrm{N} \cup \{\infty\}$, та $n < \infty$ для всіх $n \in \mathrm{N}$ (див., наприклад, [1, гл. V, § 3, с. 153-154]).

Безпосередньо з означень випливають рівності, аналогічні до рівностей (1), (5)

$$
{}^2\mathbf{min}_i(\mathbf{R}) = \prod {}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}),\ {}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = \coprod {}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R}), \tag{3.9}
$$

де символи $\prod, \coprod$ використовуються в попередньому розумінні.

Для виконання рівностей (9) також суттєва непорожність множини $\mathbf{E}_i$, бо саме з непорожності множини $\mathbf{E}_i$ випливає непорожність числової множини ${}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$, а зазначені рівності для порожньої множини ${}^2\mathbf{Im}_i(\mathbf{R})$ згідно з стандартними домовленостями щодо точних граней порожньої множини приймають беззмістовний вигляд ${}^2\mathbf{min}_i(\mathbf{R}) = \infty$, ${}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{R}) = 0$.

Уточнення проводиться так:

– для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *min обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i покладається рівним ${}^2\mathbf{min}_i(\mathbf{R})$;

– для типу зв'язку R між типами сутностей $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n$ значення *max обмеження кардинальності* (*участі*) *для типу сутності* E_i покладається рівним ${}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{R})$.

3.3.3. Логічний зв'язок між різними видами обмежень кардинальності

Розглядаючи вищеподані види обмежень кардинальності (обмеження кардинальності „дивитися через" та обмеження кардинальності участі) необхідно знайти логічний зв'язок між ними або показати, що його не має, для того щоб обгрунтувати доцільність їх одночасного використання.

В роботі [89] Хартман висловив декілька спостережень щодо даних логічних зв'язків та розглянув конкретні приклади, які їх ілюструють.

Використовуючи розглянуті вище уточнення обмежень кардинальності, далі подана низка тверджень про зв'язки між значеннями обмежень кардинальності для двох розглянутих підходів – „дивитися через" та участі.

Для цього знадобляться позначення, наведені в таблиці 3.10.

Другий стовпчик таблиці 10 відповідає кардинальності „дивитися через", а третій – кардинальності участі. Обмеження кардинальності розглядаються як (параметричні) унарні оператори на відношеннях; значення оператора **mop** позначимо через m (обов'язкове), o (необов'язкове; від mantandory та optional відповідно), значення операторів **min**, **max** для обмеженої та необмеженої кардинальності – через n, ∞, де $n \in N$, а ∞ відповідає значенню „багато". У випадку обмеженої кардинальності в позначеннях операторів буде використовуватися верхній індекс r (rectricted).

Таблиця 3.10

Позначення обмежень кардинальності

Базові обмеження кардинальності	**Кардинальність „дивитися через”**	**Кардинальність участі**
Мор обмеження кардинальності	${}^{1}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \in \{m,o\}$	${}^{2}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \in \{m,o\}$
Min і max обмеження кардинальності (обмежена кардинальність)	${}^{1}\mathbf{min}_i^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \in \{0,1\}$ ${}^{1}\mathbf{max}_i^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \in \{1,\infty\}$	${}^{2}\mathbf{min}_i^r(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \in \{0,1\}$ ${}^{2}\mathbf{max}_i^r(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \in \{1,\infty\}$
Min і max обмеження кардинальності (необмежена кардинальність)	${}^{1}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \in \mathrm{N}$ ${}^{1}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$	${}^{2}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \in \mathrm{N}$ ${}^{2}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$

Оператори $\mathbf{min},\mathbf{max}$, які вводились в п. 3.2.3 для простої необмеженої кардинальності, в позначеннях віщенаведеної таблиці 10 виглядають так:

$$\mathbf{max}_{\mathbf{E}_1}(\mathbf{R}) = {}^{1}\mathbf{max}_2(\mathbf{E}_1;\mathbf{R}), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{min}_{\mathbf{E}_1}(\mathbf{R}) = {}^{1}\mathbf{min}_2(\mathbf{E}_1;\mathbf{R}), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{max}_{\mathbf{E}_2}(\mathbf{R}^{-1}) = {}^{1}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_2;\mathbf{R}), \tag{3.12}$$

$$\mathbf{min}_{\mathbf{E}_2}(\mathbf{R}^{-1}) = {}^{1}\mathbf{min}_1(\mathbf{E}_2;\mathbf{R}). \tag{3.13}$$

Твердження 3.3 (зв’язок між обмеженнями кардинальності для бінарних типів зв’язків). Нехай R тип зв’язку між типами сутностей $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2$ – відповідні бінарне відношення та множини. Тоді виконуються рівності:

1. ${}^{1}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})$ для $i=1,2$;
2. ${}^{1}\mathbf{min}_2^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{min}_1^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$ та ${}^{1}\mathbf{min}_1^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{min}_2^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$;
3. ${}^{1}\mathbf{max}_2^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{max}_1^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$ та ${}^{1}\mathbf{max}_1^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{max}_2^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$;
4. ${}^{1}\mathbf{min}_2(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{min}_1(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$ та ${}^{1}\mathbf{min}_1(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{min}_2(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$;
5. ${}^{1}\mathbf{max}_2(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$ та ${}^{1}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})={}^{2}\mathbf{max}_2(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$. □

Доведення першого пункту розглянемо для випадку $i=1$, другий випадок $i=2$ розглядається повністю аналогічно. Згідно з домовленностями щодо значень оператора $\mathbf{mop}$, вказаними в таблиці 10, та таблицями 7, 9 маємо такі кускові схеми:

$$ {}^{1}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}\text{m, якщо } {}^{1}\pi_2^2(\mathbf{R})=\mathbf{E}_1,\\ \text{o, якщо } {}^{1}\pi_2^2(\mathbf{R})\subseteq\mathbf{E}_1.\end{cases},\quad {}^{2}\mathbf{mop}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}\text{m, якщо } {}^{2}\pi_1^2(\mathbf{R})=\mathbf{E}_1,\\ \text{o, якщо } {}^{2}\pi_1^2(\mathbf{R})\subseteq\mathbf{E}_1.\end{cases} \quad (3.14)$$

Залишається скористатися рівностями (7) про зв'язок між проекціями першого та другого роду для бінарних відношень, згідно з якими ${}^{1}\pi_2^2={}^{2}\pi_1^2$. ▫

Другий пункт доведемо для першої рівності, інша розглядається повністю аналогічно. Тут треба скористатися наступними кусковими схемами, які випливають з таблиць 5, 8, 10 та перевіряються аналогічно кусковим схемам (14):

$$ {}^{1}\mathbf{min}_2^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}1,\ \text{якщо } {}^{1}\pi_2^2(\mathbf{R})=\mathbf{E}_1,\\ 0,\ \text{якщо } {}^{1}\pi_2^2(\mathbf{R})\subset\mathbf{E}_1.\end{cases},$$

$$ {}^{2}\mathbf{min}_1^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}1,\ \text{якщо } {}^{2}\pi_1^2(\mathbf{R})=\mathbf{E}_1,\\ 0,\ \text{якщо } {}^{2}\pi_1^2(\mathbf{R})\subset\mathbf{E}_1.\end{cases}$$

Нарешті, треба застосувати рівності (7). ▫

Третій пункт доведемо також для першої рівності, інша розглядається повністю аналогічно. Згідно з домовленностями щодо значень оператора $\mathbf{max}^{r}$, вказаними в таблиці 10, та та означеннями для обмеженої кардинальності при двох підходах (пп. 3.3.1 та 3.3.2) маємо такі кускові схеми:

$$ {}^{1}\mathbf{max}_2^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}1,\ \text{якщо відношення } {}^{1}\mathbf{R}_2 \text{ функціонально},\\ \infty,\ \text{інакше}.\end{cases},$$

$$^{2}\mathbf{max}_1^{\mathrm{r}}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=\begin{cases}1, \text{ якщо відношення } ^{2}\mathbf{R}_1 \text{ функціонально,}\\ \infty, \text{ інакше.}\end{cases}.$$

Залишається скористатися рівностями (4), (8), згідно з якими $^{1}\mathbf{R}_2{=}^{2}\mathbf{R}_1$.▫

Розглянемо першу рівність четвертого пункту. З відповідних означень випливає, що ліва частина рівності співпадає з найменшим елементом множини (натуральних чисел) $\mathbf{Im}_{2,\mathbf{E}_1}(^{1}\mathbf{R}_2)$, а права – з найменшим елементом множини $\mathbf{Im}_{1,\mathbf{E}_1}(^{2}\mathbf{R}_1)$ (в позначеннях множин вказан параметр – множина, з якої обираються перші компоненти кортежів відношення). Залишається застосувати рівності (4) та (8), з яких випливає рівність $^{1}\mathbf{R}_2=\mathbf{R}{=}^{2}\mathbf{R}_1$.

Розглянемо тепер другу рівність четвертого пункту. З відповідних означень випливає, що ліва частина рівності співпадає з найменшим елементом множини (натуральних чисел) $\mathbf{Im}_{1,\mathbf{E}_2}(^{1}\mathbf{R}_1)$, а права – з найменшим елементом множини $\mathbf{Im}_{2,\mathbf{E}_2}(^{2}\mathbf{R}_2)$ (в позначеннях множин вказан параметр – множина, з якої обираються перші компоненти кортежів відношення). Залишається застосувати рівності (4) та (8), зких випливає рівність $^{1}\mathbf{R}_1=\mathbf{R}^{-1}{=}^{2}\mathbf{R}_2$. ▫

Останній п’ятий пункт доводиться аналогічно четвертому із заміною найменших елементів (інфімумів) на супремуми. Розглянемо першу рівність п’ятого пункту. З відповідних означень випливає, що ліва частина рівності співпадає з супремумом (в повній решітці N') множини $\mathbf{Im}_{2,\mathbf{E}_1}(^{1}\mathbf{R}_2)$, а права – з супремумом (в тій самій решітці) множини $\mathbf{Im}_{1,\mathbf{E}_1}(^{2}\mathbf{R}_1)$. Залишається застосувати рівності (4) та (8), зких випливає рівність $^{1}\mathbf{R}_2=\mathbf{R}{=}^{2}\mathbf{R}_1$.

Розглянемо тепер другу рівність п’ятого пункту. З відповідних означень випливає, що ліва частина рівності співпадає з супремумом множини $\mathbf{Im}_{1,\mathbf{E}_2}(^{1}\mathbf{R}_1)$, а права – з супремумом множини $\mathbf{Im}_{2,\mathbf{E}_2}(^{2}\mathbf{R}_2)$. Залишається застосувати рівності (4) та (8), з яких випливає рівність $^{1}\mathbf{R}_1=\mathbf{R}^{-1}{=}^{2}\mathbf{R}_2$. ▫□

Поставимо питання про логічний зв'язок між обмеженнями кардинальності для кардинальностей „дивитися через" та участі при необмеженій кардинальності. Якщо ставити питання точно, то мова йде про сумісність значень вигляду ${}^{1}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$, ${}^{1}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$ та ${}^{2}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$, ${}^{2}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$ для кожного $i = 1,...,n$.

Теорема 1 (про сумісність значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на взаємоінверсних бінарних відношеннях) дає відповідь на це запитання для $n = 2$ та $i = 1,2$ (точніше кажучи, з врахуванням рівностей (10)-(13) ця теорема дає безпосередню відповідь у випадку $i = 2$; випадок же $i = 1$ легко зводиться до попереднього, оскільки $(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$).

Виявляється, що має місце аналог теореми 1 (про сумісність значень операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на взаємоінверсних бінарних відношеннях) для багатосторонніх типів зв'язків. Для формулювання цієї теореми знадобиться наступна таблиця – аналог таблиці 4; в таблиці 11 зафіксоване деяке $i = 1,...,n$.

Теорема 3.2 (про сумісність значень ${}^{1}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$, ${}^{1}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$ та ${}^{2}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$, ${}^{2}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$ для n-арних відношень, $n \geq 2$). Для комірок таблиці 11, позначених „+" („–"), існує (відповідно не існує) відношення $\mathbf{R}$ з відповідними значеннями операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$. □

Доведення. Зауважимо, що при $n = 2$, $i = 2$ формулювання теореми співпадає з формулюванням теореми 1; як зазначалося віще, це випливає з рівностей (10)-(13). Випадок $n = 2$, $i = 1$ легко зводиться до випадку $n = 2$, $i = 2$, оскільки головна властивість, що рядки і стовпчики відповідають взаємоінверсним відношенням зберігається. Тому далі розгдяється випадок $n \geq 3$. ▫

Таблиця 3.11

Всі варіанти значень операторів $^{1}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\dots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$, $^{1}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\dots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$ та $^{2}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})$, $^{2}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})$ для n-арного відношення R та сумісність їх значень, $i=1,\dots,n$

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="6">$p' \overset{def}{=} {}^{2}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_i,\mathbf{R})$, $p \overset{def}{=} {}^{2}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i,\mathbf{R})$</td></tr>
<tr><td>$p'=0$, $p=0$</td><td>$p'=p$, $p'>0$</td><td>$p'=0$, $p\ge 1$, $p\in N$</td><td>$p'=0$, $p=\infty$</td><td>$p'\ge 1$, $p>p'$, $p\in N$</td><td>$p'\ge 1$, $p=\infty$</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(4)</td><td>(5)</td><td>(6)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$k' \overset{def}{=} {}^{1}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\dots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$
$k \overset{def}{=} {}^{1}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\dots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$</td><td>$k'=0$, $k=0$</td><td>(1)</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$k'=k$, $k'>0$</td><td>(2)</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$k'=0$, $k\ge 1$, $k\in N$</td><td>(3)</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$k'=0$, $k=\infty$</td><td>(4)</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$k'\ge 1$, $k>k'$, $k\in N$</td><td>(5)</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$k'\ge 1$, $k=\infty$</td><td>(6)</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table>

Не важко сформулювати та перевірити аналог п. 5 леми 1 (характеристична властивість порожнього бінарного відношення) для n-арного випадку: $\begin{aligned}&\mathbf{R}=\varnothing \Leftrightarrow {}^1\mathbf{min}(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})={}^1\mathbf{max}(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})=\\&={}^2\mathbf{min}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})={}^2\mathbf{max}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})=0\end{aligned}$.

Саме з цієї еквівалентності і випливає заповнення першого рядка та першого стовпчика таблиці 11. ▫

Розглянемо довільну комірку таблиці 11, що не лежить в першому стовпчику та в першому рядку; нехай k', k, p', p відповідні елементи повної решітки N' (натуральні числа або одиниця ∞ повної решітки). Для спрощення позначень розглянемо випадок $n=3$ та $i=3$.

Ідея доведення полягає в використанні теореми 1 та побудові по бінарному відношенню тернарного відношення введенням константної другої компоненти (по суті фіктивної компоненти).

Згідно теореми 1 існує бінарне відношення $\mathbf{R}'$ та множини $\mathbf{E}', \mathbf{E}''$, такі, що $\mathbf{R}' \subseteq \mathbf{E}' \times \mathbf{E}''$, $\min_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}')=k'$, $\max_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}')=k$ та $\min_{\mathbf{E}''}(\mathbf{R}'^{-1})=p'$, $\max_{\mathbf{E}''}(\mathbf{R}'^{-1})=p$.

Фіксуємо деякий елемент e та тернарне відношення $\mathbf{R}$ і множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ будуємо так: $\mathbf{E}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}'$, $\mathbf{E}_2 \overset{\text{def}}{=} \{e\}$, $\mathbf{E}_3 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}''$ та $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \{<e_1, e, e_3> \mid <e_1, e_3> \in \mathbf{R}'\}$. Змістовно кажучи, тернарне відношення отримується введенням в кортежі бінарного відношення другої компоненти e. Залишається показати, що це відношення шукане.

Це випливає з рівностей $\mathbf{Im}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}')={}^1\mathbf{Im}_{3,\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2}(\mathbf{R})$, $\mathbf{Im}_{\mathbf{E}''}(\mathbf{R}'^{-1})={}^2\mathbf{Im}_{3,\mathbf{E}_3}(\mathbf{R})$ та означень операторів кардинальності. ▫□

Отже можна зробити змістовний висновок: взагалі кажучи, немає логічного зв’язку між значеннями min та max обмеження кардинальності („дивитися через”) для типів сутностей $E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$, де $n \geq 3$, і min та max обмеження кардинальності (участі) для типу сутності E_i

багатостороннього типу зв'язку R, який з'єднує типи сутностей $E_1, \ldots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n$ (за умови, що R непорожній зв'язок).

Нижченаведений рисунок 3, який ілюструє доведення теореми 2 і виконаний в модифікованій нотації, подібній до графічної нотації UML [12], так як відомі нотації [12, 21, 29, 47, 67, 90] підтримують тільки один з видів обмеження кардинальності; на ньому R – тип зв'язку між типами сутностей E_1, E_2, E_3, (min1, max1) – пара значень min та max обмежень кардинальності („дивитися через") для типів сутностей E_1, E_2, (min2, max2) – пара значень min та max обмежень кардинальності (участі) для типу сутності E_3.

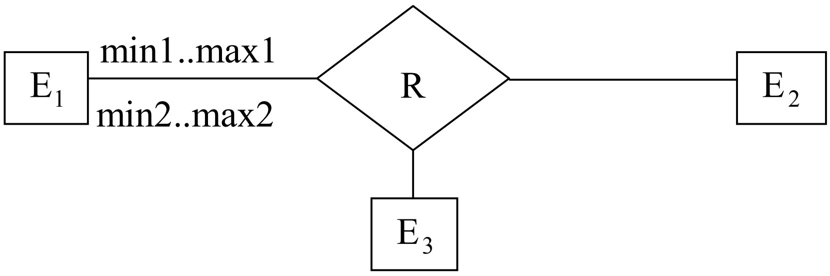


Рис. 3.3. Тип зв'язку R між типами сутностей E_1, E_2, E_3 з min та max обмеженнями кардинальності („дивитися через") та участі

З останньої теореми випливає, що між значеннями ${}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$ та ${}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})$ в загальному випадку нема логічного зв'язку. Виявляється, що причина цієї ситуації полягає у спеціальному вигляді обмежень кардинальності – рівності індексів при двох підходах до обмежень кардинальності; якщо ж зняти цю вимогу, то ситуація суттєво змінюється, про що каже наступне твердження.

Твердження 3.4 (верхня оцінка значення max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності при підході „дивитися через" для багатосторонніх зв'язків). Нехай R тип зв'яку між типами сутностей $E_1,\ldots,E_n$, де $n \geq 2$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n$ – відповідні n-арне відношення та множини. Зафіксуємо деяке $i \in \{1,\ldots,n\}$, тоді для всіх $j \in \{1,\ldots,n\}$, таких, що $j \neq i$, виконується нерівність

$$^{1}\mathbf{max}_{j}(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{j-1},\mathbf{E}_{j+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})\leq {}^{2}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}).\ \square \qquad (3.15)$$

Доведення. Розглянемо спочатку частковий випадок $n=2$, він розпадається на свої два випадки: $i=2$ (значить, $j=1$) та $i=1$ (значить, $j=2$).

Отже, нехай $i=2$, $j=1$. Тоді ліва частина нерівності (15) приймає вигляд $^{1}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$, а права – $^{2}\mathbf{max}_2(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})$. Згідно з другою рівністю п. 5 твердження 3 (про зв'язок між обмеженнями кардинальності для бінарних типів зв'язків) значення цих виразів співпадають.

Нехай тепер $i=1$, $j=2$. Тоді ліва частина нерівності (15) приймає вигляд $^{1}\mathbf{max}_2(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$, а права – $^{2}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})$. Згідно з першою рівністю п. 5 твердження 3 значення цих виразів співпадають.

Таким чином, для $n=2$ нерівність (15) встановлена; більш того, вона просто переходить в рівність. ▫

Далі розглянемо випадок $n\geq 3$. З метою спрощення позначень основну ідею доведення продемонструємо для $n=3$, $i=1$ та $j=3$; доведення для загального випадку будується аналогічним чином.

Для вказаних значень параметрів нерівність (15) для тернарного відношення, яку треба довести, приймає вигляд

$$^{1}\mathbf{max}_3(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2;\mathbf{R})\leq {}^{2}\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_1;\mathbf{R}). \qquad (3.16)$$

Почнемо з перевірки допоміжної нерівності для потужностей повних образів одноелементних множин:

для довільних елементів $e_1\in\mathbf{E}_1$ та $e_2\in\mathbf{E}_2$ $|{}^{1}\mathbf{R}_3[e_1,e_2]|\leq|{}^{2}\mathbf{R}_1[e_1]|$. (3.17)

Нагадаймо, що згідно з означеннями пп 3.3.1 та 3.3.2 для повних образів з нерівності (16) маємо $^{1}\mathbf{R}_3[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]=\{z\,|<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,z>\in\mathbf{R}\}$ та $^{2}\mathbf{R}_1[e_1]=\{<y,z>|<e_1,y,z>\in\mathbf{R}\}$. Очевидно, що нерівность (17) буде доведена, якщо побудувати вкладення множини $^{1}\mathbf{R}_3[e_1,e_2]$ в множину $^{2}\mathbf{R}_1[e_1]$, тобто ін'єктивне відображення вигляду $\alpha{:}^{1}\mathbf{R}_3[e_1,e_2]\to{}^{2}\mathbf{R}_1[e_1]$.

Очевидно, що відображення $\alpha(z) = < e_2, z >$ для $z \in {}^1\mathbf{R}_3[e_1,e_2]$ є шуканим. Нерівність (16) встановлена. ▫

Нагадаймо, що згідно з означеннями пп 3.3.1 та 3.3.2

$$ {}^1\mathbf{max}_3(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2;\mathbf{R}) = \coprod {}^1\mathbf{Im}_3(\mathbf{R}), \qquad (3.18) $$

де ${}^1\mathbf{Im}_3(\mathbf{R}) = \{|{}^1\mathbf{R}_3[e_1,e_2]| \,\|\, e_1 \in \mathbf{E}_1 \wedge e_2 \in \mathbf{E}_2\}$,

$$ {}^2\mathbf{max}_1(\mathbf{E}_1;\mathbf{R}) = \coprod {}^2\mathbf{Im}_1(\mathbf{R}), \qquad (3.19) $$

де ${}^2\mathbf{Im}_1(\mathbf{R}) = \{|{}^2\mathbf{R}_1[e_1]| \,\|\, e_1 \in \mathbf{E}_1\}$.

З нерівності (17) випливає, що для довільного елемента множини ${}^1\mathbf{Im}_3(\mathbf{R})$ існує елемент множини ${}^2\mathbf{Im}_1(\mathbf{R})$, який більше його; таким чином, ці множини знаходяться у відношення конфінальності: в позначеннях [2] ${}^1\mathbf{Im}_3(\mathbf{R}) \prec {}^2\mathbf{Im}_1(\mathbf{R})$. Головна ж властивість відношення конфінальності полягає у тому, що при переході до супремумів (за умови їх існування, а супремуми існують, бо решітка N' повна) нерівність зберігається (див., наприклад, [2, наслідок 1]); тобто маємо нерівність $\coprod {}^1\mathbf{Im}_3(\mathbf{R}) \le \coprod {}^2\mathbf{Im}_1(\mathbf{R})$. Ця нерівність згідно з наведеними вище означеннями (18)-(19) переходить у нерівність (16). ▫ □

Отже, значення ${}^2\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R})$ виступає верхньою оцінкою значень вигляду ${}^1\mathbf{max}_j(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{j-1},\mathbf{E}_{j+1},\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$ для всіх $j = 1,\ldots,n$, відмінних від (зафіксованого) $i = 1,\ldots,n$. Саме в цьому проявляється, зокрема, принципова різниця між підходами „дивитися через” та участі.

При розгляді бінарних типів зв’язків (тобто простої кардинальності) були встановлені логічні зв’язки між обмеженнями кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності (див. таблиці 1, 2 та пп. 6, 9 леми 1). Виявляється, що, згідно з наступним твердженням, для багатосторонніх типів зв’язків має місце аналогічна ситуація при підході „дивитися через”[1].

[1] Зауважимо, що при кардинальності участі також має місце та сама ситуація згідно з наступним твердженням 6.

Твердження 3.5 (зв'язок між значеннями min, max обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, підхід „дивитися через", багатосторонні зв'язки). Нехай R тип зв'яку між типами сутностей $E_1,...,E_n$, де $n \ge 2$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_n$ – відповідні n-арне відношення та множини. Для довільного $i \in \{1,...,n\}$ виконуються наступні еквівалентності

1. ${}^1\mathbf{min}_i{}^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 0 \Leftrightarrow {}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 0$;
2. ${}^1\mathbf{min}_i{}^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 1 \Leftrightarrow {}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \ge 1$;
3. ${}^1\mathbf{max}_i{}^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 1 \Leftrightarrow {}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \le 1$;
4. ${}^1\mathbf{max}_i{}^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = \infty \Leftrightarrow {}^1\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R}) > 1$. □

Доведення. Безпосередньо з означень обмежень кардинальності випливає, що твердження пп. 1 та 2 еквівалентні; дійсно треба просто перейти до заперечень в кожній з частин еквівалентності. Такий самий логічний зв'язок зберігається між пп. 3, 4. Тому доведемо, наприклад, п. 1 та п. 3. ▫

Для доведення п. 1 перейдемо від вихідного n-арного відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_n$ до бінарного відношення ${}^1\mathbf{R}_i$ на множинах $\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_i$; нагадаймо, що за означенням ${}^1\mathbf{R}_i = \{<< e_1,...,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n >, e_i > | < e_1,...,e_{i-1},e_i,e_{i+1},...,e_n > \in \mathbf{R}\}$.

Застосуємо п. 6 леми 1 до відношення ${}^1\mathbf{R}_i$ та отримуємо еквівалентність:

$$\pi_1^2({}^1\mathbf{R}_i) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n \Leftrightarrow \mathbf{min}_{\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n}({}^1\mathbf{R}_i) = 0. \quad (3.20)$$

Скористаємось тепер рівностями

$$\pi_1^2({}^1\mathbf{R}_i) = {}^1\pi_i^n(\mathbf{R}), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{min}_{\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n}({}^1\mathbf{R}_i) = {}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}), \quad (3.22)$$

які випливають безпосередньо з відповідних означень, та перетворимо еквівалентність (20) в наступну еквівалентність

$${}^1\pi_i^n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n \Leftrightarrow {}^1\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times ... \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 0.$$

Залишається скористатися означенням оператора ${}^1\mathbf{min}_i{}^r(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$, згідно з яким виконується еквівалентність

$^{1}\pi_{i}^{n}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n \Leftrightarrow {}^{1}\mathbf{min}^{r}{}_{i}(\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 0$. ▫

Для доведення п. 3 застосуємо п. 9 леми 1 до відношення $^{1}\mathbf{R}_i$ та отримаємо еквівалентність:

$$^{1}\mathbf{R}_i \text{ - функціональне відношення} \Leftrightarrow \mathbf{max}_{\mathbf{E}_1\times\ldots\times\mathbf{E}_{i-1}\times\mathbf{E}_{i+1}\times\ldots\times\mathbf{E}_n}({}^{1}\mathbf{R}_i) \le 1. \quad (3.23)$$

Скористаємось тепер рівністю

$$\mathbf{max}_{\mathbf{E}_1\times\ldots\times\mathbf{E}_{i-1}\times\mathbf{E}_{i+1}\times\ldots\times\mathbf{E}_n}({}^{1}\mathbf{R}_i) = {}^{1}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}), \quad (3.24)$$

яка випливає безпосередньо з відповідних означень, та перетворимо еквівалентність (23) в наступну еквівалентність

$^{1}\mathbf{R}_i$ - функціональне відношення $\Leftrightarrow {}^{1}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}) \le 1$.

Залишається скористатися означенням оператора $^{1}\mathbf{max}_i^r(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})$, згідно з яким виконується еквівалентність

$^{1}\mathbf{R}_i$ - функціональне відношення $\Leftrightarrow {}^{1}\mathbf{max}_i^r(\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{i-1} \times \mathbf{E}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_n;\mathbf{R}) = 1$. ▫ □

При переході до кардинальності участі аналогічний логічний зв'язок між обмеженою та необмеженою кардинальністю зберігається, про що говорить наступне твердження.

Твердження 3.6 (зв'язок між значеннями min, max обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, кардинальність участі, багатосторонні зв'язки). Нехай R тип зв'яку між типами сутностей $E_1,\ldots,E_n$, де $n \ge 2$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n$ – відповідні n-арне відношення та множини. Для довільного $i \in \{1,\ldots,n\}$ виконуються наступні еквівалентності

1. $^{2}\mathbf{min}_i{}^{r}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) = 0 \Leftrightarrow {}^{2}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) = 0$;
2. $^{2}\mathbf{min}_i{}^{r}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) = 1 \Leftrightarrow {}^{2}\mathbf{min}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \ge 1$;
3. $^{2}\mathbf{max}_i{}^{r}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) = 1 \Leftrightarrow {}^{2}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) \le 1$;
4. $^{2}\mathbf{max}_i{}^{r}(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) = \infty \Leftrightarrow {}^{2}\mathbf{max}_i(\mathbf{E}_i;\mathbf{R}) > 1$. □

Доведення проводиться аналогічно випадку твердження 5 тільки від вихідного відношення $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n$ треба перейти до бінарного відношення ${}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$ на множинах $\mathbf{E}_{i}$, $\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}-1} \times \mathbf{E}_{\mathrm{i}+1} \times \ldots \times \mathbf{E}_{\mathrm{n}}$; нагадаймо, що за означенням ${}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}} = \{< \mathrm{e}_{\mathrm{i}}, < \mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_{\mathrm{i}-1},\mathrm{e}_{\mathrm{i}+1},\ldots,\mathrm{e}_{\mathrm{n}} >> \,|\, < \mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_{\mathrm{i}-1},\mathrm{e}_{\mathrm{i}},\mathrm{e}_{\mathrm{i}+1},\ldots,\mathrm{e}_{\mathrm{n}} > \in \mathbf{R}\}$.

При цьому еквівалентності та рівності (20) – (24) переходять відповідно у наступні

$$\pi_1^2({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) \subset \mathbf{E}_{\mathrm{i}} \Leftrightarrow \mathbf{min}_{\mathbf{E}_{\mathrm{i}}}({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) = 0\,, \tag{3.20'}$$

$$\pi_1^2({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) = {}^{2}\pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{R})\,, \tag{3.21'}$$

$$\mathbf{min}_{\mathbf{E}_{\mathrm{i}}}({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) = {}^{2}\mathbf{min}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R})\,, \tag{3.22'}$$

$${}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}\ \textbf{-}\ \text{функціональне відношення} \Leftrightarrow \mathbf{max}_{\mathbf{E}_{\mathrm{i}}}({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) \le 1\,, \tag{3.23'}$$

$$\mathbf{max}_{\mathbf{E}_{\mathrm{i}}}({}^{2}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) = {}^{2}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R})\,.\ \square \tag{3.24'}$$

З встановлених зв’язків між обмеженою та необмеженою кардинальностями випливає наступний аналог твердження 4 (про верхню оцінку max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності при підході „дивитися через”) для обмеженої кардинальності.

Наслідок 3.1 (зв’язок між значення max обмеження кардинальності для обмеженої кардинальності при підходах „дивитися через” та кардинальності участі, багатосторонні зв’язки). Нехай R тип зв’яку між типами сутностей $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_{\mathrm{n}}$, де $\mathrm{n} \ge 2$, а $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}}$ – відповідні n-арне відношення та множини. Зафіксуємо деяке $\mathrm{i} \in \{1,\ldots,\mathrm{n}\}$, таке, що ${}^{2}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{r}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R}) = 1$. Тоді для всіх $\mathrm{j} \in \{1,\ldots,\mathrm{n}\}$, таких, що $\mathrm{j} \ne \mathrm{i}$, виконується аналогічна рівність ${}^{1}\mathbf{max}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{r}}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{j}-1},\mathbf{E}_{\mathrm{j}+1},\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}};\mathbf{R}) = 1$. □

Доведення. З п. 3 твердження 6 випливає нерівність ${}^{2}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R}) \le 1$; отже з огляду на твердження 4 маємо нерівності ${}^{1}\mathbf{max}_{\mathrm{j}}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{j}-1},\mathbf{E}_{\mathrm{j}+1},\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}};\mathbf{R}) \le {}^{2}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R}) \le 1$, тобто ${}^{1}\mathbf{max}_{\mathrm{j}}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{j}-1},\mathbf{E}_{\mathrm{j}+1},\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}};\mathbf{R}) \le 1$. Залишається застосовувати до останньої нерівності п.3 твердження 5 та отримати шукану рівність ${}^{1}\mathbf{max}_{j}^{r}(\mathbf{E}_1,...,\mathbf{E}_{j-1},\mathbf{E}_{j+1},...,\mathbf{E}_n;\mathbf{R})=1$. □

Для бінарних типів зв'язків (тобто $n=2$) наслідок 1, аналогічно твердженню 4 (в якому нерівності переходили в рівності), приймає тривіальний вигляд; дійсно для першого випадку $i=2$, тобто $j=1$ рівності ${}^{2}\mathbf{max}_{2}^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})=1$ та ${}^{1}\mathbf{max}_{1}^{r}(\mathbf{E}_2;\mathbf{R})=1$ еквівалентні, бо говорять про функціональність відношення $\mathbf{R}^{-1}$; для другого випадку $i=1$, тобто $j=2$ рівності ${}^{2}\mathbf{max}_{1}^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=1$ та ${}^{1}\mathbf{max}_{2}^{r}(\mathbf{E}_1;\mathbf{R})=1$ також еквівалентні, бо говорять про функціональність відношення $\mathbf{R}$ (формальне доведення спирається на рівності (4) та (8)).

З останніх двох тверджень 5, 6 випливає, що обмеження min, max кардинальності для необмеженої кардинальності є більш виразними ніж ті самі обмеження для обмеженої кардинальності, причому для обох підходів, що розглядаються – „дивитися через" (твердження 5) та кардинальності участі (твердження 6). Таким чином, для багатосторонніх зв'язків успадковується аналогічне положення для бінарних зв'язків.

Основні результати розділу 3 наступні.

1. Уточнені поняття базових типів обмеження кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків введенням операторів $\mathbf{min},\mathbf{max},\mathbf{mop}$.

2. Встановлено логічні зв'язки між значеннями: min та mop обмеження кардинальності для підходів „дивитися через" і участі (твердження 1 та 2 про зв'язок між значеннями min та mop обмеження кардинальності для підходів „дивитися через" та участі) та обґрунтована необхідність їх одночасного використання; обмеження кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності (таблиці 1, 2, пп. 6, 9 леми 1; твердження 5 та 6 про зв'язок між значеннями min, max обмежень кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності, підхід „дивитися через" (участі), багатосторонні зв'язки) та показано, що за допомогою min і max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності можна виразити інші базові типи обмеження

кардинальності; обмеження кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків при підходах „дивитися через" і участі (твердження 3 про зв'язок між обмеженнями кардинальності для бінарних типів зв'язків, твердження 4 про верхню оцінку значень max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності при підході „дивитися через" для багатосторонніх зв'язків, наслідок 1 про зв'язок між значення max обмеження кардинальності для обмеженої кардинальності при підходах „дивитися через" та кардинальності участі, багатосторонні зв'язки) та показано, що дані підходи принципово різні при розгляді тільки багатосторонніх типів зв'язків.

3. Встановлено логічні зв'язки між значеннями операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ на взаємоінверсних бінарних відношеннях (теорема 1 про сумісність значень операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ на взаємоінверсних відношеннях); отриманий аналогічний результат для багатосторонніх типів зв'язків (теорема 2 про сумісність значень ${}^{1}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$, ${}^{1}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$ та ${}^{2}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$, ${}^{2}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$ для n-арних відношень, $n \geq 2$). На основі отриманих результатів показано, що немає логічного зв'язку між значеннями операторів $\mathbf{min},\mathbf{max}$ на вихідному бінарному та оберненому відношеннях (між значеннями ${}^{1}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$, ${}^{1}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{1},...,\mathbf{E}_{i-1},\mathbf{E}_{i+1},...,\mathbf{E}_{n};\mathbf{R})$ та ${}^{2}\mathbf{min}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$, ${}^{2}\mathbf{max}_{i}(\mathbf{E}_{i};\mathbf{R})$): для довільного розподілу значень операторів існує відношення, на якому ці значення досягаються.

РОЗДІЛ 4. РОЗШИРЕНА МОДЕЛЬ „СУТНІСТЬ-ЗВ'ЯЗОК"

Мета розділу полягає у розгляді та формалізації розширеної моделі „сутність-зв'язок". Об'єкт дослідження – поняття цієї моделі: тип сутності суперклас, тип сутності підклас, тип зв'язку суперклас/підклас, тип сутності категорія, обмеження участі, обмеження неперетину.

Основні результати розділу: уточнення обмежень участі та неперетину, що накладаються на типи сутностей суперклас та підклас, за допомогою покриття та розбиття, функціональності та проекції відповідного відношення; зображення типу зв'язку суперклас/підклас, ієрархії типів типу сутності та ієрархії типів моделі за допомогою орієнтованого графа; уточнення успадкування (одиничного та множинного) типів сутностей; введення поняття коректності ієрархії типів типу сутності та коректності ієрархії типів всієї моделі.

Основні результати розділу опубліковані в [4, 36], апробовані на конференції [4].

4.1. Типи сутностей суперклас та підклас

Починаючи з 80-х років минулого сторіччя, стали швидко розповсюджуватися нові типи додатків баз даних: мультимедійні додатки, інструменти автоматизованої підготовки виробництва, інструменти автоматизованого проектування. Для того, щоб створювати моделі даних для цих баз даних, стало недостатньо понять моделі „сутність-зв'язок", через це з'являється *розширена модель „сутність-зв'язок"* (*Enhanced Entity-Relationship model*) або *EER-модель.*

Розширена модель „сутність-зв'язок" включає всі концепції моделі „сутність-зв'язок" і, природно, власні концепції. Як і у випадку моделі „сутність-зв'язок" не існує єдиного загальноприйнятого стандарту для розширеної моделі, але є набір загальних конструкцій, які лежать в основі більшості варіантів моделі. Далі подається опис та формалізація цих загальних конструкцій: типу сутності суперклас, типу сутності підклас, типу зв'язку суперклас/підклас, типу зв’язку isa, концепцій уточнення/узагальнення і категоризації згідно [14, гл. 2; 18, част. III, гл. 14; 21, част. III, гл. 12; 22, част. II, гл. 3; 77, част. IV].

Слід зазначити, що поняття моделі не мають загальноприйнятої та чіткої інтерпретації; більш того, існує суттєвий термінологічний різнобій; тому у наступній таблиці наведено варіанти, що зустрічаються в доступній російськомовній літературі [14, 18, 21, 22] та праці, в якій висвітлені пропозиції, щодо уніфікації понять моделі „сутність-зв’язок” [109].

Таблиця 4.1

Ключові поняття розширеної моделі „сутність-зв’язок” та їхні назви

Поняття	1 варіант	2 варіант	3 варіант	4 варіант	5 варіант
Суперклас	Супертип	Базовий клас	Суперклас	Надтип	Суперклас
Підклас	Підтип	Підклас	Підклас	Підтип	Підклас
Зв’язок суперклас/ підклас	–	–	Зв’язок суперклас/ підклас	–	Зв’язок суперклас/ підклас
Зв’язок isa	Зв’язок isa	Зв’язок isa	–	Зв’язок типу „Є” („Есть”)	Зв’язок isa
Джерело	[18, част. III, гл. 14]	[14, гл. 2]	[21, част. III, гл. 12]	22, част. II, гл. 3	[109]

Такий термінологічний різнобій зумовлений, зокрема, неточностями перекладу відповідних джерел. Якщо притримуватися термінології даної роботи, то доцільно суперклас називати типом сутності суперклас, підклас – типом сутності підклас, зв’язок суперклас/підклас – типом зв’язку суперклас/підклас, зв’язок isa – типом зв’язку isa.

Поняття типів сутностей суперклас та підклас було добавлено у розширену модель „сутність-зв’язок” після публікації роботи Дж. Сміта (J. Smith) та Д.

Сміта (D. Smith) [106]. Причиною стали випадки, коли тип сутності містить визначені сутності, які мають спеціальні властивості, що не мають інші сутності даного типу. Тому корисно розділяти такий тип сутності на декілька спеціальних типів сутностей, кожний з яких має назву – *тип сутності підклас* (*subclass entity type*), а вихідний тип сутності називають *типом сутності суперклас* (*superclass entity type*).

Типи сутностей суперклас, підклас та категорія (тип сутності категорія розглядається у підрозділі 4.5) доцільно вводити в модель „сутність-зв'язок":

– по-перше, вони дозволяють не описувати декілька раз аналогічні сутності, завдяки чому економиться час проектувальника, а діаграми сутностей та зв'язків стають більш зручними для сприйняття;

– по-друге, вони дозволяють ввести у модель більший об'єм семантичної інформації у формі, прийнятної для користувачів моделі.

Тип сутності суперклас – тип сутності, який включає одну або декілька різних допоміжних сукупностей його сутностей, що повинні бути представлені у моделі даних.

Тип сутності підклас – допоміжна сукупність сутностей деякого типу сутності (типу сутності суперклас), яка повинна бути представлена у моделі даних.

Уточнення одного і того ж типу сутності може проводитися на основі різних відмінних особливостей, тобто один тип сутності суперклас може мати декілька множин типів сутностей підклас, які відображають різні способи групування сутностей типу сутності суперклас.

Кожна сутність типу сутності підклас є сутністю відповідного типу сутності суперклас, але сутність типу сутності суперклас не обов'язково є сутністю деякого типу сутності підклас. Слід зауважити, що тип сутності підклас має містити щонайменше одну сутність, інакше не має сенсу створювати даний тип сутності підклас.

Нижчеподана властивість типів сутностей суперклас та підклас досить важлива при розгляді та уточнені понять розширеної моделі „сутність-зв'язок", але в літературі про неї явно не кажуть, хоча використовують: один і той же тип сутності не може бути одночасно типом сутності суперклас та типом сутності підклас даного типу сутності суперклас (змістовно кажучи, рефлексивності тут нема; якщо ж переходити до формальних уточнень, то відповідні графи повинні бути ациклічними за умови їхньої коректності).

Питання, пов'язані з формалізацією розширеної моделі „сутність-зв'язок", можна знайти, наприклад, у роботах Елмасрі, Наватхе [77] та Чена [58, 66, 68]. В даних роботах уточнення здійснюються за допомогою теорії множин, зокрема, теорії решіток.

Уточнення типів сутностей підклас Чен здійснює за допомогою предикатів. В свою чергу Елмасрі також уточнює типи сутностей підклас за допомогою предикатів, але він передбачає існування типів сутностей підклас, які не задаються предикатами.

Типи сутностей суперкласи та підкласи інтерпретуються як множини, а сутності вказаних типів – як елементи даних множин. Нехай множина $\mathbf{E}$ відповідає типу сутності суперклас, а непорожні множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ – відповідним типам сутностей підклас даного типу сутності суперклас, тоді $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{E}$.

4.2. Обмеження на типах сутностей суперклас та типах сутностей підклас

Далі розглядається тип сутності суперклас та відповідні типи сутностей підклас, які відповідають деякому способу групування сутностей суперкласу. При створенні типу сутності суперклас та відповідних йому типів сутностей підклас на ці типи сутностей накладаються такі обмеження:

– *обмеження участі* (*participation constraint*);

– *обмеження неперетину* (*disjoint constraint*).

Обмеження участі визначає, чи кожна сутність типу сутності суперклас відноситься до деякого типу сутності підклас.

Обмеження участі може бути *обов'язковим* (*mandatory*) або *необов'язковим* (*optional*). При обов'язковій участі кожна сутність типу сутності суперклас повинна бути сутністю деякого типу сутності підклас. При необов'язковій участі деяка сутність типу сутності суперклас може не бути сутністю жодного типу сутності підклас.

Зауважимо, що обмеження участі по суті співпадає з mор обмеженням кардинальності (при підході кардинальності участі) типу сутності суперклас.

Обмеження неперетину описує зв'язок між сутностями типів сутностей підклас (які пов'язані з одним типом сутностей суперклас) і вказує, чи може сутність типу сутності суперклас належати тільки до одного або до декількох типів сутностей підклас (іншими словами, чи можуть різні типи сутностей підклас перетинатися).

Обмеження неперетину може бути *неперетинаючим* (*disjoint*) або *перетинаючим* (*nondisjoint*). Якщо обмеження неперетину є неперетинаючим (або іншими словами типи сутностей підклас є неперетинаючими), то кожна сутність типу сутності суперклас може бути сутністю не більше одного типу сутності підклас. Якщо обмеження неперетину є перетинаючим (або іншими словами типи сутностей підклас є перетинаючи), то сутність типу сутності суперклас може бути сутністю декількох типів сутностей підклас.

Зрозуміло, що дане обмеження можна застосовувати, якщо тип сутності суперклас має більше одного типу сутності підклас.

Так як вказані два обмеження є логічно незалежними характеристиками утворення типів сутностей суперклас та підклас, то при їх сумісному використанні виділяють чотири наступні різні види обмежень:

– *обов'язкове та неперетинаюче;*
– *необов'язкове та неперетинаюче;*
– *обов'язкове та перетинаюче;*

– *необов'язкове та перетинаюче.*

За допомогою діаграм Вена можна зобразити дані види обмежень на рисунках 1-4. Згідно попередніх позначень множина E відповідає типу сутності суперклас, а множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ – типам сутностей підклас даного типу сутності суперклас.

При обов'язковому та неперетинаючому обмеженні будь-яка сутність типу сутності суперклас повинна належати одному і тільки одному типу сутності підклас даного типу сутності суперклас (рисунок 1).

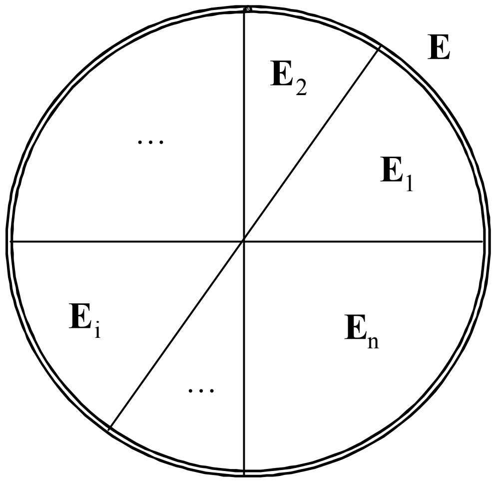


Рис. 4.1 Обов'язкове та неперетинаюче обмеження

При необов'язковому та неперетинаючому обмеженні кожна сутність типу сутності суперклас або належить єдиному типу сутності підклас даного типу сутності суперклас, або не належить жодному типу сутності підклас даного типу сутності суперклас (рисунок 2).

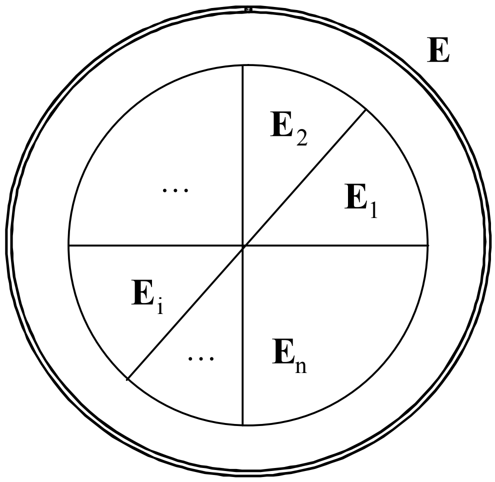


Рис. 4.2. Необов'язкове та неперетинаюче обмеження

При обов'язковому та перетинаючому обмеженні будь-яка сутність типу сутності суперклас повинна належати деякому типу сутності підклас (необов'язково одному) даного типу сутності суперклас (рисунок 3).

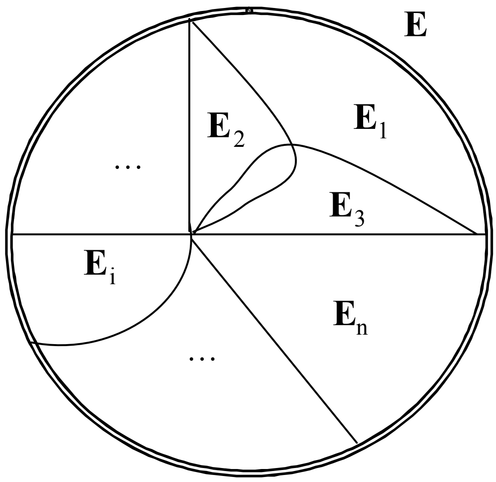


Рис. 4.3. Обов'язкове та перетинаюче обмеження

При необов'язковому та перетинаючому обмеженні кожна сутність типу сутності суперклас або належить деякому типу сутності підклас (необов'язково одному) даного типу сутності суперклас, або не належить жодному типу сутності підклас даного типу сутності суперклас (рисунок 4).

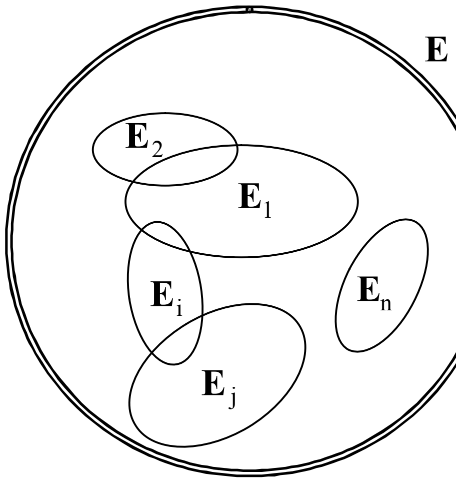


Рис. 4.4. Необов'язкове та перетинаюче обмеження

Обов'язкове обмеження участі уточнюється за допомогою покриття множини. Очевидно, що обов'язкове та перетинаюче обмеження можна уточнити за допомогою покриття підмножинами $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ множини **E**, тобто $\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$ і $\mathbf{E}_i \neq \varnothing$, де $i = 1, 2, ..., n$.

Підмножини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ утворюють розбиття множини **E**, якщо розглядати обов'язкове та неперетинаюче обмеження, тобто $\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_i \neq \varnothing$ і $\mathbf{E}_i \cap \mathbf{E}_j = \varnothing$, де $i \neq j$ та $i, j = 1, 2, ..., n$.

Якщо розглядати необов'язкове обмеження участі, то необов'язкове та перетинаюче обмеження можна уточнити за допомогою покриття підмножинами $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ множини **E** або її власної підмножини, тобто $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{E}$ і $\mathbf{E}_i \neq \varnothing$, де $i = 1, 2, ..., n$.

Нарешті, необов'язкове та неперетинаюче обмеження можна уточнити за допомогою розбиття підмножинами $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ множини **E** або її власної підмножини, тобто $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{E}$, $\mathbf{E}_i \neq \varnothing$ і $\mathbf{E}_i \cap \mathbf{E}_j = \varnothing$, де $i \neq j$ та $i, j = 1, 2, ..., n$.

У попередньому розділі обмеження кардинальності, які накладалися на типи зв'язків, уточнювалися за допомогою функціональності та проекції відповідних відношень. Тому по аналогії дамо уточнення обмеження неперетину та обмеження участі.

Розглядається множина $\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cup \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n\}$ і задається на ній бінарне відношення $\prec$: $e \prec \mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} e \in \mathbf{E}_i$, тобто множина $\mathbf{E}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ (тип сутності підклас) містить елемент e множини $\mathbf{E}$ (типу сутності суперклас).

Обмеження неперетину можна уточнити за допомогою функціональності відношення $\prec$.

Якщо відношення $\prec$ функціональне, то відповідне обмеження неперетину є неперетинаючим (типи сутностей підклас даного типу сутності суперклас є неперетинаючими).

Якщо відношення $\prec$ не функціональне, то відповідне обмеження неперетину є перетинаючим (типи сутностей підклас даного типу сутності суперклас є перетинаючими).

Обмеження участі можна уточнити за допомогою проекції відношення $\prec$. Якщо $\pi_1^2(\prec) = \mathbf{E}$, то обмеження участі обов'язкове, у випадку, коли $\pi_1^2(\prec) \subseteq \mathbf{E}$, обмеження участі необов'язкове.

У таблиці 2 показані різні види обмежень, що накладаються на тип сутності суперклас і його типи сутностей підклас, та їх уточнення.

Обмеження, що накладаються на тип сутності суперклас та його типи сутностей підклас, застосовуються для кожного способу групування сутностей типу сутності суперклас. Очевидно, що не має сенсу застосовувати дані обмеження до типів сутностей підклас різних логічно-незалежних способів групування сутностей типу сутності суперклас, так як тоді, взагалі кажучи, не отримується корисна (чи коректна) інформація.

Таблиця 4.2

Уточнення обмежень, що накладаються на тип сутності суперклас та його типи сутностей підклас

	$\prec$ функціональне	$\prec$ не функціональне
$\pi_1^2(\prec) = \mathbf{E}$	Обов'язкове та неперетинаюче обмеження (типи сутностей підклас утворюють розбиття типу сутності суперклас)	Обов'язкове та перетинаюче обмеження (типи сутностей підклас утворюють покриття типу сутності суперклас)
$\pi_1^2(\prec) \subseteq \mathbf{E}$	Необов'язкове та неперетинаюче обмеження (типи сутностей підклас утворюють розбиття типу сутності суперклас або його власної підмножини сутностей)	Необов'язкове та перетинаюче обмеження (типи сутностей підклас утворюють покриття типу сутності суперклас або його власної підмножини сутностей)

Розглядаючи тип сутності суперклас та його типи сутностей підклас, цікаво розглянути способи, за допомогою яких можна їх задати. У літературі (див., наприклад, [77, часть IV, с. 103]) запропоновано спосіб *визначаючого предикати* (*defining predicate*) та *визначаючого атрибута* (*defining attribute*). Тобто для кожного фіксованого способу групування сутностей типу сутностей суперклас виділяють деякі визначаючі атрибути, а для кожного типа сутностей підклас деякий визначаючий предикат, заданий на цих визначаючих атрибутах (точніше на значеннях атрибутів). Для того, щоб визначити приналежність сутності типа сутності суперклас відповідному типу сутності підклас, необхідно проаналізувати значення предиката даного типу сутності підклас: якщо значення істинне, то приналежність має місце, якщо хибне, то не має.

Виникає задача задання множин, що інтерпретують типи сутностей підклас, в такий спосіб: задати деяке відношення на множині, яка інтерпретує тип сутності суперклас, і за ним відтворити шукані множини.

Дана задача має розв'язок для окремого випадку – для типу сутності суперклас і його типів сутностей підклас з обов'язковим та неперетинаючим видом обмежень, яке на них накладається. Як зазначалось раніше, даний вид обмежень уточнюється за допомогою розбиття. Спираючись на добре відомі теоретико-множинні результати, розбиття множини можна компактно задавати відповідним відношенням еквівалентності (див., наприклад, [26, гл. 1, § 1, ст. 23-24; 28, гл. 1, § 1, ст. 23-24; 44, гл. 2, § 2, теор. 2.1, ст. 55]). Класи еквівалентності цього відношення і інтерпретують типи сутностей підклас, а множина, на якій задане відношення еквівалентності, – тип сут-ності суперклас.

При цьому потрібно відмітити, що при побудові типів сутностей підклас деякого типу сутності суперклас проектант в моделі явно вказує кількість відповідних типів сутностей підклас. В той час як відношення еквівалентності, в загальному випадку, не дозволяє задавати кількість необхідних класів еквівалентності (точніше кажучи, оцінити потужність фактор-множини).

Можна зробити спробу розгляду більш загального випадоку, знімаючи умову транзитивності та переходячи від відношення еквівалентності до відношення толерантності (див., наприклад, [28, гл. 1, § 1, ст. 26; 44, гл. 3, § 1, ст. 80]). Добре відомо, що між відношенням толерантності і покриттями множини існує тісний зв'язок (нагадаймо, що саме в термінах покриття вище уточнювався тип сутності суперклас та його типи сутностей підклас з перетинаючим видом обмежень). Однак на цьому шляху виникає проблема при відтворенні класів толерантності (елементів покриття): якщо по покриттю відношення толерантності будується однозначно, то обернена задача має, взагалі кажучи, декілька розв'язків (див., наприклад, [28, гл. 1, § 1, ст. 26; 44, гл. 3, § 4, теореми 3.6-3.7, ст. 107, теорема 3.9, ст. 109]). Таким чином, при заданні покриття відношенням толерантності потрібні додаткові засоби.

4.3. Тип зв'язку суперклас/підклас. Успадкування

Тип зв'язку суперклас/підклас (*superclass/subclass relationship type*) – це тип зв'язку між типом сутності суперклас та його типами сутностей підклас.

Деякі автори даний тип зв'язку називають *типом зв'язку клас/підклас* (*class/subclass relationship type*) [77, част. IV, с. 87].

Даний тип зв'язку є (n+1)-арним типом зв'язку (тобто це тип зв'язку між одним типом сутності суперклас та його n типами сутностей підклас), де $n \geq 1$.

Уточнення типу зв'язку суперклас/підклас між типами сутностей $E, E_1, E_2, ..., E_n$ проводиться в два етапи: визначення серед типів єдиного суперкласа (нехай для визначеності E, решта типів є підкласами) та співставлення типам $E, E_1, E_2, ..., E_n$ множин $\mathbf{E}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ відповідно, причому множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$ формують покриття множини $\mathbf{E}$ або її власної підмножини.

Тип зв'язку isa (*isa relationship type*) – це тип зв'язку суперклас/підклас між типом сутності суперклас та його (одним з багатьох, взагалі кажучи) типом сутності підклас.

Даний тип зв'язку є бінарним типом зв'язку „один до одного" (1:1) і його уточнення здійснюється за допомогою відношень за загальною схемою.

Згідно попередніх уточнень бінарний тип зв'язку уточнюється за допомогою бінарного відношення (підрозділ 1.3.2), тому тип зв'язку isa інтерпретується як тотожнє відношення вигляду $\mathit{\Delta}_{\mathbf{E}_1} = \{ < e,e > | e \in \mathbf{E}_1 \}$ (діагональ на множині $\mathbf{E}_1$).

Нагадаємо, max обмеження кардинальності (простої, обмежена кардинальність) пов'язане з функціональністю бінарних відношень (підрозділ 3.2.1); в даному випадку бінарний тип зв'язку буде виду „один до одного", оскільки відповідне відношення та обернене до нього відношення функціональні. Дійсно, тотожне відношення та обернене до нього (яке співпадає з вихідним відношенням) є функціональними, тобто тип зв'язку isa – це дійсно бінарний тип зв'язку „один до одного".

Необхідно зазначити, що в доступній російськомовній літературі не має чітко окреслених даних типів зв’язків [14, 18, 21, 22], причому у праці [21] використовують термін „тип зв’язку суперклас/підклас” в розумінні типу зв’язку isa.

Тип зв’язку суперклас/підклас деякого типу сутності суперклас можна зобразити за допомогою орієнтованого графа (точніше дерева одиничної глибини), де множина вершин – множина типів сутностей (типу сутності суперклас та його типів сутностей підклас), множина дуг – множина пар вершин (початком дуги буде вершина, що відповідає типу сутності підклас, кінцем дуги – вершина, яка відповідає типу сутності суперклас).

На рисунку 5 зображено граф для типу сутності суперклас E, його типів сутностей підклас $E_1, E_2, ..., E_n$ та відповідного типу зв’язку суперклас/підклас.

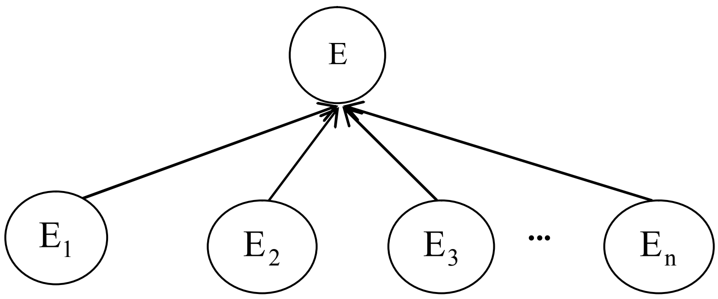


Рис. 4.5. Граф типу зв’язку суперклас/підклас типу сутності суперклас E

Так як типи сутностей підклас є типами сутностей, то вони можуть мати свої типи сутностей підклас. Очевидно, що поняття типу сутності суперклас та типу сутності підклас відносні. Так, один тип сутності в одному типі зв’язку суперклас/підклас може бути типом сутності підклас, а в іншому – типом сутності суперклас.

Тип сутності суперклас разом із своїми типами сутностей підклас, типами сутностей підклас своїх типів сутностей підклас і т.і. утворює так звану *ієрархію типів* (*type hierarchy*) даного типу сутності. Поняття ієрархії типів у літературі зустрічається під різними іменами, наприклад ієрархія уточнення, ієрархія узагальнення, ієрархія IS-A [21, част. III, гл. 12].

При уточненні типів сутностей суперклас та підклас Чен особливу увагу приділяє розгляду типу сутності суперклас та відповідних типів сутностей підклас при обов'язковому обмеженні участі; на множині типів сутностей, що входять до ієрархії типів деякого типу сутності, він задає відношення часткового порядку і розглядає відповідні решітки. У роботі [58] запропоновано алгоритм ефективної організації даних та їх пошуку за допомогою булевих решіток.

Для того, щоб зобразити ієрархію типів даного типу сутності, необхідно об'єднати графи типів зв'язків суперклас/підклас типів сутностей суперклас (дерева одиничної глибини), які входять до даної ієрархії типів. Ієрархія типів даного типу сутності буде коректною, якщо граф ієрархії типів є ациклічним орієнтованим графом.

На рисунку 6 зображено граф ієрархії типів типу сутності E. Вершини графа відповідають типам сутностей, а дуги – типам зв'язку isa. Коренева вершина відповідає типу сутності, для якої будується відповідна ієрархія типів.

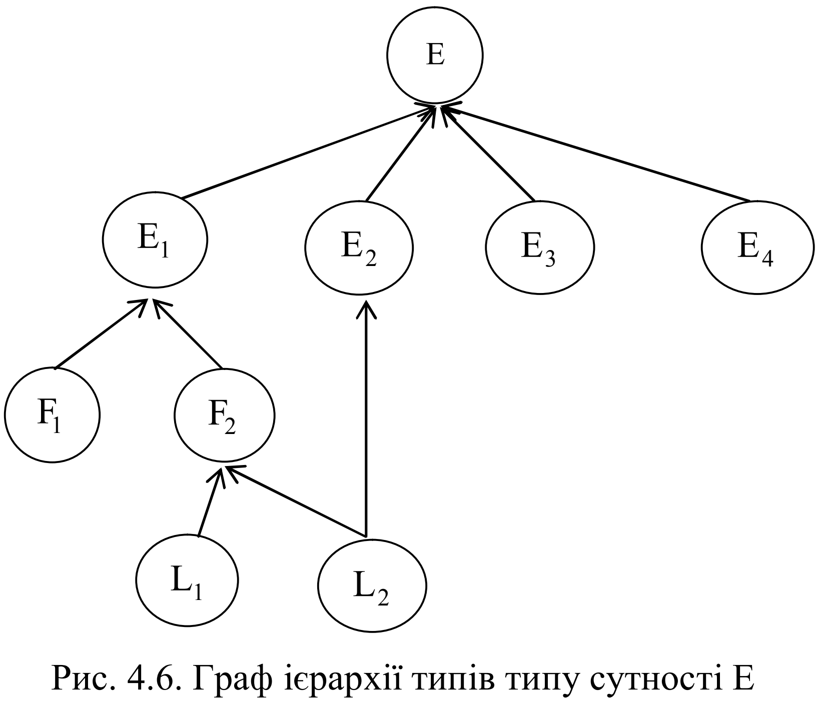


Рис. 4.6. Граф ієрархії типів типу сутності E

Сутність типу сутності підклас є сутністю відповідного типу сутності суперклас, тобто вона представляє той же об'єкт реального світу, що і тип сутності суперклас; тому тип сутності підклас успадковує атрибути та типи зв'язків типу сутності суперклас, а також може мати *власні* атрибути та типи зв'язків (іноді їх називають *специфічні* або *локальні* атрибути та типи зв'язків).

Існують наступні форми *успадкування* (*inheritance*): *одиничне успадкування* (*single inheritance*) та *множинне успадкування* (*multiple inheritance*).

Одиничне успадкування означає, що тип сутності підклас має рівно один тип сутності суперклас і успадковує атрибути та типи зв'язків саме даного типу сутності суперклас.

Далі розглядається множинне успадкування. Тип сутності, який є типом сутності підклас декількох типів сутностей суперклас, називається *спільним типом сутності підклас* (*shared entity type subclass*) даних типів сутностей суперклас. Це означає, що його елемент повинен бути елементом всіх типів сутностей суперклас, для яких він є типом сутності підклас. В даному випадку до спільного типу сутності підклас застосовується множинне успадкування, при якому атрибути та типи зв'язків типів сутностей суперклас успадковуються даним спільним типом сутності підклас.

Для того, щоб прослідкувати множинне та одиничне успадкування типів сутностей, які входять до ієрархії типів деякого типу сутності, необхідно побудувати відповідний граф ієрархії типів (рисунок 6).

Аналізуючи орієнтований граф ієрархії типів даного типу сутності, можна виділити такі його особливості:

– якщо вершині інцидентна одна вихідна дуга, то до відповідного типу сутності підклас застосовується одиничне успадкування;

– якщо вершині інцидентно більше однієї вихідної дуги, то до відповідного типу сутності підклас застосовується множинне успадкування.

Для того, щоб прослідкувати множинне та одиничне успадкування у межах всієї моделі, необхідно побудувати ієрархію типів моделі, тобто частину моделі, яка складається з всіх типів сутностей моделі і типів зв'язків суперклас/підклас, які пов'язують відповідні типи сутностей суперклас та типи сутностей підклас. Ієрархія типів моделі отримується шляхом об'єднання графів типів зв’язку суперклас/підклас та ізольованих вершин, що відповідають типам сутностей, які не є учасниками типів зв’язку суперклас/підклас даної моделі (рисунок 7).

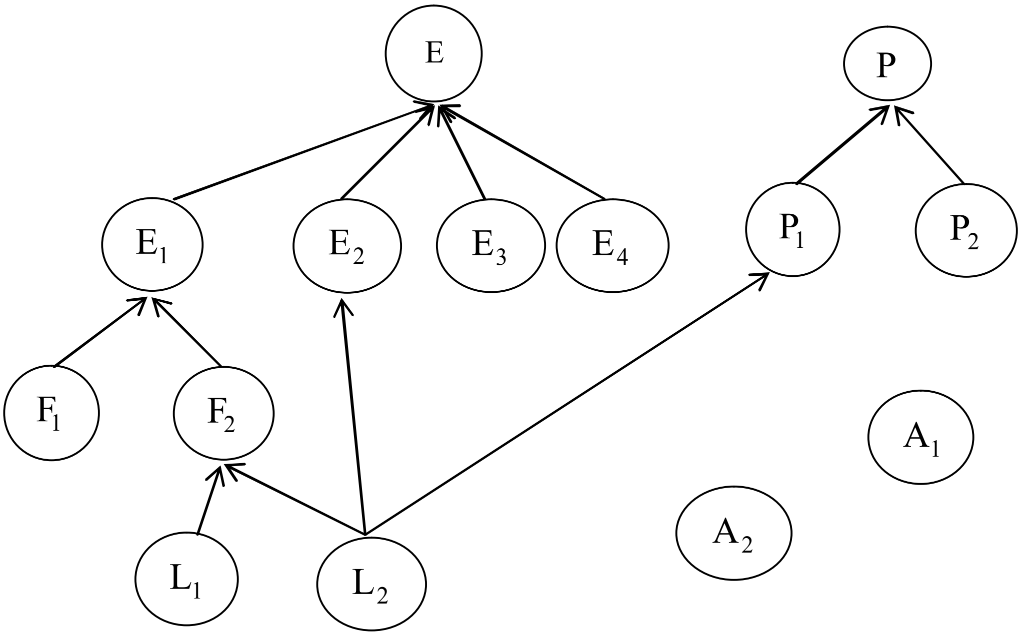


Рис. 4.7. Граф ієрархії типів моделі

Аналізуючи даний орієнтований граф ієрархії типів моделі, можна прослідкувати одиничне та множинне успадкування у межах моделі, аналогічно як це було зроблено для ієрархії типів деякого типу сутності. Слід зауважити: до типів сутностей, яким відповідають ізольовані вершини (тобто степінь вершини дорівнює 0) та тупикові вершини (тобто їм инцидентні тільки вхідні дуги), не застосовують жодного виду успадкувань.

4.4. Концепція уточнення/узагальнення

У процесі виділення типу сутності суперклас та типів сутностей підклас використовують два підходи – уточнення та узагальнення.

Уточнення (*specialization*) – це процес підкреслення відмінностей між сутностями типу сутності (потенційного типу сутності суперклас) шляхом виділення їх особливих характеристик.

Узагальнення (*generalization*) – це процес прибирання відмінностей між сутностями типів сутностей (потенційних типів сутностей підклас) шляхом виділення їх спільних характеристик.

Уточнення представляє собою низхідний підхід для визначення типу сутності суперклас і пов’язаними з ним типів сутностей підклас. Множина типів сутностей підклас визначається на основі деяких відмінних характеристик окремих сутностей типу сутності суперклас. При виявленні набору типів сутностей підклас деякого типу сутності суперклас виконується також виділення специфічних для кожного типу сутності підклас атрибутів (у випадку необхідності), а також виділення будь-яких типів зв’язків, які існують між кожним типом сутності підклас та іншими типами сутностей або типами сутностей підклас (також у випадку необхідності).

Узагальнення представляє собою висхідний підхід, який дозволяє створювати узагальнений тип сутності суперклас на основі різних вихідних типів сутностей підклас. Процес узагальнення можна розглядати як протилежний (дуальний) до процесу уточнення, тому весь цей підхід у моделюванні відомий під загальною назвою *уточнення/узагальнення.*

Відповідно до вищеописаного методу визначаючого предиката та визначаючого атрибута під час процесу уточнення та узагальнення виділяють *тип сутності підклас, визначений предикатом* (*predicate-defined subclass entity type*), деякі автори називають його *типом сутності підклас, визначеним умовою* (*condition-defined subclass entity type*).

В моделі існують також *типи сутностей підклас, визначені користувачами* (*user-defined subclass entity type*) [77, част. IV, с. 92]. В цьому випадку, сутності типу сутності суперклас розподіляються у відповідні типи сутностей підклас, визначені користувачем, індивідуально, тобто на розсуд проектувальника моделі.

4.5. Концепція категоризації

Далі розглядається специфічна форма успадкування – *вибіркове успадкування* (*selective inheritance*). Як раніше зазначалось, у моделі можуть бути *спільні типи сутностей підклас*. Інколи необхідно змоделювати ситуацію, коли спільний тип сутності підклас успадковує атрибути та типи зв’язків тільки одного свого типу сутності суперклас. При цьому даний тип сутності підклас називається *типом сутності категорія* (*category entity type*) або *підклас об’єднуючого типу* (*subclass a union type*), а дане моделювання – *категоризацією*. Тип сутностей категорія було введено у модель Елмасрі в 1985 році [79].

Тип зв’язку між типами сутностей суперклас та типом сутності категорія є (n+1)-арним типом зв’язку, причому $n \geq 2$ (тобто це тип зв’язку між одним типом сутності категорія та його n типами сутностей суперклас).

На жаль, в літературі часто даний тип зв’язку також називають типом зв’язку суперклас/підклас, хоча він несе зовсім іншу (дуальну, див. далі) інформацію про взаємозв’язок між його учасницями.

Типи сутностей суперкласи та категорії інтерпретуються як множини, а їхні сутності – як елементи даних множин. Припустимо, що множина $\mathbf{E}$ відповідає типу сутності категорія, а множини $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_n$, $n > 1$, – типам сутностей суперклас даного типу сутності категорія, тоді, $\mathbf{E} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$.

До типу сутності категорія, застосовують вибіркове успадкування, тобто сутність даного типу сутності категорія успадковує атрибути та типи зв’язків єдиного типу сутності суперклас, до якого дана сутність належить.

Тип сутності категорія може мати *власні* атрибути та типи зв’язків.

Відмінності між спільним типом сутності підклас та типом сутності категорія:

– спільний тип сутності підклас уточнюється за допомогою перетину його типів сутностей суперклас. Тип сутності категорія уточнюється за допомогою об'єднання його типів сутностей суперклас;

– спільний тип сутності підклас успадковує атрибути та типи зв'язків всіх своїх типів сутностей суперклас, тобто дані атрибути (типи зв'язків) отримуються об'єднанням атрибутів (типів зв'язків) всіх відповідних типів сутностей суперклас. Тип сутності категорія успадковує атрибути та типи зв'язків одного з своїх типів сутностей суперклас для конкретної сутності;

– власні атрибути та типи зв'язків спільного типу сутності підклас використовуються для підкреслення особливостей визначених сутностей типів сутностей суперклас (які належать відповідному перетину). Власні атрибути та типи зв'язків типу сутності категорія використовуються, щоб показати спільні атрибути та типи зв'язків всіх сутностей типів сутностей суперклас.

Аналізуючи вищеподані відмінності, можна сказати, що поняття спільного типу сутності підклас та типу сутності категорія є дуальними (двоїстими).

Кожна сутність типу сутності категорія є сутність єдиного типу сутності суперклас, тому на тип сутності категорія та відповідні типи сутностей суперклас накладається лише обмеження участі.

Обмеження участі може бути *обов'язкове* або *необов'язкове*. При обов'язковій участі всі сутності типів сутностей суперклас повинні бути сутностями відповідного типу сутності категорія, тобто в попередніх позначеннях $\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$. При необов'язковій участі (деяка) сутність (деякого) типу сутності суперклас може не бути сутністю відповідного типу сутності категорія, тобто $\mathbf{E} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$.

При обов'язковій участі сутностей типів сутностей суперклас можна використати і уточнення/узагальнення для представлення сутностей (нагадаймо, що у випадку уточнення/узагальнення вимагається виконання включення $\mathbf{E} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$, зокрема рівності). Вибір методу представлення залежить від розробника.

Основні результати розділу 4 наступні.

1. Уточнені поняття тип сутності суперклас, тип сутності підклас, тип сутності категорія, тип зв'язку суперклас/підклас та обмеження участі і неперетину цього типу зв'язку.

2. Введенням понять коректності ієрархії типів типу сутності та коректності ієрархії типів всієї моделі уточнена вимога коректності моделі щодо успадкування (одиничного і множинного). Наявність у моделі типів сутностей суперклас та підклас зумовлює необхідність перевірки коректності ієрархії типів моделі (зокрема, ієрархії типів типу сутності).

3. Показано дуальність понять спільного типу сутності підклас та типу сутності категорія.

Висновки

Головним результатом дисертації є побудова змістовного фрагменту математичної теорії моделі „сутність-зв'язок", який є необхідною частиною формалізації моделі, на базі якої можна переходити до її стандартизації.

Основні результати роботи наступні.

1. На основі огляду моделі „сутність-зв'язок" уніфіковані її основні елементи: тип сутності, сутність, тип зв'язку, зв'язок, слабкий тип сутності, сильний тип сутності, слабкий тип зв'язку, сильний тип зв'язку, тип сутності суперклас, тип сутності підклас, тип сутності категорія, тип зв'язку суперклас/підклас, тип зв'язку isa.

2. Уточнена вимога коректності побудови моделі по слабким типам зв'язків (щодо успадкування). Показано дуальність понять спільного типу сутності підклас та типу сутності категорія.

3. Уточнені поняття базових типів обмеження кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків введенням операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}, \mathbf{mop}$.

4. Встановлено логічні зв'язки між значеннями: min та mop обмеження кардинальності для підходів „дивитися через" і участі та обґрунтована необхідність їх одночасного використання; обмеження кардинальності для обмеженої та необмеженої кардинальності та показано, що за допомогою min і max обмеження кардинальності для необмеженої кардинальності можна виразити інші базові типи обмеження кардинальності; обмежень кардинальності для бінарних та багатосторонніх типів зв'язків при підходах „дивитися через" і участі та показано, що дані підходи принципово різні при розгляді тільки багатосторонніх типів зв'язків.

5. Встановлено логічні зв'язки між значеннями операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на взаємоінверсних бінарних відношеннях (отриманий аналогічний результат для багатосторонніх типів зв'язків). На основі отриманих результатів показано, що немає логічного зв'язку між значеннями операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на вихідному

бінарному та оберненому відношеннях (між значеннями ${}^{1}\mathbf{min}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{i}-1},\mathbf{E}_{\mathrm{i}+1},\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}};\mathbf{R})$, ${}^{1}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{i}-1},\mathbf{E}_{\mathrm{i}+1},\ldots,\mathbf{E}_{\mathrm{n}};\mathbf{R})$ та ${}^{2}\mathbf{min}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R})$, ${}^{2}\mathbf{max}_{\mathrm{i}}(\mathbf{E}_{\mathrm{i}};\mathbf{R})$): для довільного розподілу значень операторів існує відношення, на якому ці значення досягаються.

Список використаних джерел

1. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф.– Москва: Наука, 1984. – 564 с.

2. Буй Д.Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.

3. Буй Д. Модель „сущность-связь”: роли, сильные и слабые типы сущностей и типы связей / Д. Буй, Л. Сильвейструк // Knowledge-Dialogue-Solution : international conference, June 18-24, 2007, Varna, Bulgaria: proceedings. – Sofia. – 2007. – P. 316-322.

4. Буй Д. Расширенная модель „сущность-связь”: типы сущностей суперкласс и подкласс, тип связи суперкласс/подкласс / Д. Буй, Л. Сильвейструк // Knowledge-Dialogue-Solution: international conference, June 23-27, 2008, Varna, Bulgaria: proceedings. – Sofia. – 2008. – Vol. 2, No. 1. – С. 149-154.

5. Буй Д. Формализация структурных ограничений связей в модели „сущность-связь” / Д. Буй, Л. Сильвейструк // Knowledge-Dialogue-Solution: international conference, June 20-25, 2006, Varna, Bulgaria: proceedings. – Sofia. – 2006. – P. 223-229.

6. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. –С. 232-240.

7. Буй Д.Б. Модель „сутність-зв’язок”: ролі, сильні та слабкі типи сутностей і типи зв’язків / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 129-133.

8. Буй Д.Б. Модель „сутність-зв’язок”: формалізація сутностей та зв’язків / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 143-152.

9. Буй Д.Б. Уточнення обмежень кардинальності типу зв’язку у моделі „сутність-зв’язок” / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, September 22-26 , 2008: abstracts. – Kyiv. – 2008. – Ч. 2. – С. 10-15.

10. Буй Д.Б. Формализация структурных ограничений связей в модели „сущность-связь” / Д.Б. Буй, Л.Н. Сильвейструк // Интеллектуальные системы и компьютерные науки: международная конференция, 23-27 октября 2006 г., Москва, МГУ: научные работы. – Москва: МГУ. – 2006. – Т. 1, Ч.1. – С 76-79.

11. Буй Д.Б. Формалізація моделі „сутність-зв’язок” / Д.Б. Буй, Л.М. Сільвейструк // Dynamical System Modeling and Stability Investigation: international conference, May 22-25, 2007, Kyiv, Ukraine: thesis of conference reports. – Kyiv. – 2007. – P. 364.

12. Буч Г. UML. Руководство пользователя / Г. Буч, Д. Рамбо, А. Джекобсон. – Москва: ДМК, 2000. – 432 с.

13. Вендров А.М. CASE-технологии. Современные методы и средства проектирования информационных систем / А.М. Вендров.– Москва: Финансы и статистика, 1998. – 176 с.

14. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс.: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: „Вильямс”, 2004. – 1088 с.

15. Глушков В.М. Алгебра. Языки. Программирование: [изд. 3-е, перераб. и доп.] / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.

16. Горин С.В. CASE-средство S-Designor 4.2 для разработки структуры базы данных [Електронний ресурс] / С.В. Горин, А.Ю. Тандоев // Системы управления базами данных. – 1996. – №1. – С. 79-86. – Режим доступу до журн.: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1996/01/source/case.html.

17. Горчинская О.Ю. Designer/2000 – новое поколение CASE-продуктов фирмы ORACLE [Електронний ресурс] / О.Ю. Горчинская // Системы управления базами данных. – 1995. – №3. – С. 9-25. – Режим доступу до журн.: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1995/03/source/design.html.

18. Дейт Дж. Введение в системы баз даннях: [8-е издание.: пер. с англ.] / Дж. Дейт. – Москва: „Вильямс”, 2005. – 1328 с.

19. Колянов Г.Н. Консалтинг при автоматизации предприятий: подходы, методы, средства [Електронний ресурс] / Г.Н. Колянов. – Режим доступу: http://www.interface.ru/case/defs.htm.

20. Коннолли Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: [теория и практика, 2-е изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. – Москва: „Вильямс”, 2000. – 1120 с.

21. Коннолли Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: [теория и практика, 3-е изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. – Москва: „Вильямс”, 2003. – 1440 с.

22. Крёнке Д. Теория и практика построения баз данных: [8-е изд.] / Д. Крёнке. – Санкт-Петербург: „Питер”, 2003. – 800 с.

23. Кумсков М. Rational Rose 98 – CASE-продукт нового поколения [Електронний ресурс] / М. Кумсков. – Режим доступу: http://www.interface.ru/public/rose98/rose98.htm.

24. Маклаков С.В. BPwin и ERwin. CASE-средства разработки информационных систем / С.В. Маклаков. – Москва: „ДИАЛОГ-МИФИ”, 1999. – 256 с.

25. Маклаков С.В. Создание информационных систем с AllFusion Modeling Suite / С.В. Маклаков. – Москва: „ДИАЛОГ-МИФИ”, 2005. – 432 с.

26. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

27. Манифест систем объектно-ориентированных баз данных [Електронний ресурс] / М. Аткинсон, Ф. Бансилон, Д. ДеВитт [та ін.] // Системы управления базами данных. – 1995. – №4. – С. 142-155. – Режим доступу до журн.: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1995/04/source/manifest.html.

28. Мельников О.В. Общая алгебра: [в двух томах, под общ. ред. Скорняков Л.А.] / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романов и др. – Москва: Наука, 1990. – Т. 1. – 1990. – 592 с.

29. Методология IDEF1X. Информационное моделирование. – Москва: „Мета-Технология”, 1993. – 120 с.

30. Олле Т.В. Предложение КОДАСИЛ по управлению базами данных: [пер. с англ.] / Т.В. Олле. – Москва: Финансы и статистика, 1981. – 286 с.

31. Панащук С.А. Разработка информационных систем с использованием CASE-системы Silverrun [Електронний ресурс] / С.А. Панащук // Системы управления базами данных. – 1995. – №3. – С. 41-47. – Режим доступу до журн.: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1995/03/source/srun.html.

32. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім „Академперіодика”, 2001. – 198 с.

33. Сільвейструк Л.М. Логічні зв’язки між значеннями обмежень кардинальності для підходів „дивитися через” та участі / Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 4. – С. 173-178.

34. Сільвейструк Л.М. Модель „сутність-зв’язок” – популярна семантична модель: історія, формалізація, бібліографія / Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 4. – С. 201-208.

35. Сільвейструк Л.М. Обмеження кардинальності типу зв’язку у моделі „сутність-зв’язок” / Л.М. Сільвейструк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: всеукраїнська наукова конференція, 23-25 вересня 2008 р., Львів, Україна: тези. – 2008. – С. 119.

36. Сільвейструк Л.М. Розширена модель „сутність-зв’язок”: уточнення типів сутностей суперклас і підклас та типу зв’язку суперклас/підклас / Л.М. Сільвейструк // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 147-154.

37. Сільвейструк Л.М. Схема доведення основної теореми про властивості операторів min, max в формалізації ER-моделі / Л.М. Сільвейструк // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, 4-9 September 2007, Berdyansk, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2007. – P. 229-234.

38. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.

39. Тиори Т. Проектирование структур баз данных: [в двух книгах: пер. с англ.] / Т. Тиори, Дж. Фрай. – Москва: Мир, 1985. – Кн. 1. – 1985. – 287 с.

40. Тиори Т. Проектирование структур баз данных: [в двух книгах: пер. с англ.] / Т. Тиори, Дж. Фрай. – Москва: Мир, 1985. – Кн. 2. – 1985. – 320 с.

41. Успенский В.А. Лекции о вычислимых функциях / В.А. Успенский. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 492 с.

42. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных / М.Ш. Цаленко. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.

43. Цаленко М.Ш. Семантические и математические модели баз данных / М.Ш. Цаленко. – Москва: ВИНИТИ, 1985. – 207 с.

44. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок / Ю.А. Шрейдер. – Москва: Наука, 1971. – 255 с.

45. Язык описания данных КОДАСИЛ: [пер. с англ.] – Москва: Статистика, 1981. – 183 с.

46. Balaban M. Resolving the „weak status” of weak entity types in entity relationship schemas: [Technical report, Information Systems Program, Department of industrial Engineering and Management, Ben-Gurion University of the Negev, ISRAEL] / M. Balaban, P. Shoval. – 2000. – 15 p.

47. Barker R. CASE*Method. Function and Process Modelling / R. Barker. – Addison-Wesley Publishing Co., 1990. – 236 p.

48. Batini C. Database design: An entity-relationship approach / C. Batini, S. Ceri, S.B. Navathe. – Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1992. – 232 p.

49. Bruce T. Designing quality database with IDEF1X information models / T. Bruce. – New York: Dorset House, 1992. – 120 p.

50. Buy D. Formalization of structural constraints of relationships in model „entity-relationship" / D. Buy, L. Silveystruk // Electronic Computers and Informatics'2006: international scientific conference, September 20-22, 2006, Kosice, Slovakia: proceedings. – Kosice. – 2006.– P. 96-101.

51. Buy D. Formalization of structural constraints of relationships in model „entity-relationship" / D. Buy, L. Silveystruk // International journal „Information theories & applications". – Sofia. – 2007. – Vol. 14, N. 4. – P. 343-349.

52. Calvanese D. Making object-oriented schemas more expressive / D. Calvanese, M. Lenzerini // ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART: symposium on Principle of Database Systems Proceeding, May 24-26, 1994, Minneapolis, Minnesota: Proceedings – 1994. – P. 243-254.

53. Case.Аналитик для IBM PC. Руководство аналитика. – Москва: Эйтекс, 1993. – 116 с.

54. Case.Аналитик для IBM PC. Руководство пользователя. – Москва: Эйтекс, 1993. – 108 с.

55. Chen C. Trends in conceptual modeling: Citation analysis of the ER conference papers (1979-2005) / C. Chen, I.-Y. Song, W. Zhu // International Society for Scientometrics and Informatrics: international conference, June 25-27, 2007, Madrid, Spain: proceedings. – 2007. – P. 189-200.

56. Chen P.P. A preliminary framework for entity-relationship models / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Information Modeling and Analysis: international conference, October 15-20, 1981 – 1981. – P. 19-28.

57. Chen P.P. An algebra for a directional binary entity-relationship model / P.P. Chen // Data Engineering: international conference, April 24-27, 1984, Los Angeles, California: proceedings. – 1984. – P. 24-27.

58. Chen P.P. Efficient data retrieval and manipulation using Boolean entity lattice / P.P. Chen, A. Yang // Data & Knowledge Engineering. – 1996. – Vol. 20. – P. 211-226.

59. Chen P.P. English sentence structure and entity-relationship diagrams / P.P. Chen // Journal of Information Science. – 1983. – Vol. 2, No. 3. – P. 127-149.

60. Chen P.P. English, Chinese and ER Diagrams / P.P. Chen // Data & Knowledge Engineering. – June 1997. – Vol. 23, No. 1. – P. 5-16.

61. Chen P.P. Entity-relationship diagrams and english sentence structure / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, December 10-12, 1979, Los Angeles, California: proceedings. – 1979. – P. 13-14.

62. Chen P.P. Entity-relationship modeling: historical events, future trends, and lessons learned / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, November 27-30, 2001, Yokohama, Japan: proceedings. – 2001. – P. 71-77.

63. Chen P.P. ER – a historical perspective and future directions / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California, USA: proceeding. – 1983. – P. 71-77.

64. Chen P.P. From ancient Egyptian language to future conceptual modeling / P.P. Chen // Conceptual Modeling. – Berlin, Springer-Verlag, Lecturing Notes in Computer Sciences. – 1998. – No. 1565. – P. 57-66.

65. Chen P.P. Recent literature on the entity-relationship approach / P.P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, December 10-12, 1979, Los Angeles, California: proceedings. – 1979. – P. 3-12.

66. Chen P.P. The application of Boolean lattice to data manipulation on entity types and their subtypes: [Technical report, Computer Science Department, Louisiana State University] / P.P. Chen, A. Yang. – Louisiana: Louisiana State University, 1988. – 14 p.

67. Chen P.P. The entity-relationship model – towards a unified view of data / P.P. Chen // ACM Transactions on Database Systems. – March 1976. – Vol. 1, No. 1. – P. 9-36. – Переклад на російську мову можна знайти за адресою: http://www.osp.ru/dbms/1995/03/271.htm.

68. Chen P.P. The lattice structure of entity sets / P.P. Chen, M. Li // Entity-Relationship Approach: international conference, November 9-11, 1987, New York City, United States: proceedings. – 1987. – P. 217-229.

69. Chung I. A decomposition of relations using the entity-relationship approach / I. Chung, F. Nakaiuura, P. Chen // Entity-Relationship Approach to Information Modeling and Analysis: international conference, October 12-14, 1981, Washington, DC, USA: proceedings. – 1981. – P. 72-85.

70. Codd E.F. A relational model of data for large shared data banks / E.F. Codd // Communications of the ACM (CACM). – 1970. – Vol. 13, N. 6. – P. 377-387.

71. Codd E.F. Data Models in Database Management / E.F. Codd // Workshop in Data Abstraction, Databases, and Conceptual Modelling: international conference, June 23-26, 1980, Pingree Park, Colorado: proceedings. – 1980. – P. 18-36.

72. Date C.J. Temporal data & the relational model / C.J. Date, H. Darwen, N. Lorentzos. – 2002. – 422 p.

73. Doberkat E.-E. Algebrais semantics of ER-models in the context of the calculus of relations. Part I: Static view: [notes] / E.-E. Doberkat, E. Omodeo // Theoretical Computer Science – Springer-Verlag, 2001. – 46 p.

74. Doberkat E.-E. Algebrais semantics of ER-models in the context of the calculus of relations. Part II: Dinamic view / E.-E. Doberkat, E. Omodeo // Relational Methods in Computing Science, number 2561 in Lecture Notes in Computing Science. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – P. 50-65.

75. Doberkat E.-E. ER modeling from first relational principles: [Technical report, Fachbereich informatik, Dortmund University] / E.-E. Doberkat, E. Omodeo. – Dortmund: Dortmund University, 2003. – 36 p.

76. Elmasri R. A graphical query facility for ER databases / R. Elmasri, J. Larsen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 29-30, 1985, Chicago, Illinois, USA: proceeding. – 1985. – P. 236-255.

77. Elmasri R. Fundamentals of database systems: [4-th edition] / R. Elmasri, S. Navathe. – Pearson: Addison-Wesley, 2004. – 1030 p.

78. Elmasri R. GORDAS: a formal high-level query language for the entity-relationship model / R. Elmasri, G. Wiederhold // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California, USA: proceeding. – 1983. – P. 49-72.

79. Elmasri R. The category concept: An extension to the entity-relationship model / R. Elmasri, A. Hevner, J. Weldreyer // Data & Knowledge Engineering. – 1985. – Vol. 1, No. 1. – P. 75-116.

80. Embley D. Synergistic Database Design with an Extended Entity-Relationship Model / D. Embley, W. Ling, T. Wang // Enity-Relationship Approach to Database Design and Querying Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 8-20, 1989, Toronto, Canada: proceedings. – 1989. – P. 111-128.

81. Embley D.W. Object oriented systems analysis: a model-driven approach / D.W. Embley, B.D. Kurtz, S.N. Woodfield. – New Jersey: Prentice Hall, 1992. – 111 p.

82. Evolution of Entity-Relationship Models [Електронний ресурс] / – Режим доступу: http://wwwiti.cs.uni-magdeburg.de/~patig/er_evo/er.html.

83. Ferg S. Cardinality concepts in entity-relationship modeling / S. Ferg // Entity-Relationship Approach: international conference, October 23-25, 1991, San Mateo, California: proceeding. – 1991. – P. 1-30.

84. Gogolla M. Fundamentals and pragmatics of an entity-relationship approach / M. Gogolla. – Braunschweig, 1994. – 136 p.

85. Goldstein R.C. Some findings on the intuitiveness of entity-relationship constructs / R.C. Goldstein, V.C. Storey // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 8-10, 1990, Lausanne, Switzerland: proceedings. – 1990. – P. 9-23.

86. Hainaut J.-L. Entity-Relationship model: formal specification and comparison / J.-L. Hainaut // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 8-10, 1990, Lausanne, Switzerland: proceedings. – 1990. – P. 53-64.

87. Hammer M. Database description with SDM: a semantic database model / M. Hammer, D. McLeod // ACM Transactions on Database Systems. – 1981. – Vol. 6, No. 3. – P. 351-386.

88. Hartmann S. English sentence structures and EER modeling / S. Hartmann, S. Link // Conceptual Modeling, Conferences in Research and Practice in Information Technology: international conference, November 5-9, 2007, Auckland, New Zealand: proceedings. — 2007. – Vol. 67. – P.37-45.

89. Hartmann S. Reasoning about participation constraints and Chen's constraints / S. Hartmann // Conferences in Research and Practice in Information Technology. – 2003. – Vol. 17. – P. 8-16.

90. IDEF1 Information Modeling. A Reconstruction of the Original Air Force Wright Aeronautical Laboratory: [Technical Report AFWAL-TR-81-4023, електронний ресурс] – Режим доступу: www.idef.ru.

91. Jensen C.S. Temporal Database Management [Електронний ресурс] / C.S. Jensen. – Режим доступу: http://www.cs.aau.dk/~csj/Thesis/.

92. Jones T. Binary equivalents of ternary relationships in entity-relationship modeling: a logical decomposition approach / T. Jones, I.-Y. Song // Database Management. – 2000. – Vol. 11. – P. 12-19.

93. Lenzerini M. Cardinality constraints in the entity-relationship model / M. Lenzerini, G. Santucci // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California: proceeding. – 1983. – P. 529-549.

94. Lenzerini M. On the satisfiability of dependency constraints in entity-relationship schemata / M. Lenzerini, P. Nobili // Information Science. – 1990. – Vol. 15. – P. 453-461.

95. Loizou G. A guided tour of relational database and beyond / G. Loizou, M. Levene. – Berlin: Springer, 1999. – 519 p.

96. Markowitz V.M. A modified relational algebraand its use in an entity-relationship environment / V.M. Markowitz, Y. Raz // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California, USA: proceedings. – 1983. – P. 315-328.

97. Markowitz V.M. ERROL: an entity-relationship, role oriented query language / V.M. Markowitz, Y. Raz // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California: proceeding. – 1983. – P. 329-345.

98. Navathe S. A methodology for database schema mapping from extended entity relationship models into the hierarchical model / S. Navathe, A. Cheng // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California: proceeding. – 1983. – P. 12-20.

99. Omar N. Heuristics-based entity-relationship modeling through natural language processing / N. Omar, P. Hanna, P. Kevitt // Artificial Intelligence and Cognitive Science: Irish Conference, September 8-10, 2004, Castlebar, Ireland: proceedings. – 2004. – P. 302-313.

100. Parent C. An algebra for a General Entity-Relationship Model / C. Paren, S. Spaccapietra // IEEE Transactions on Software Engineering. – 1985. – Vol. 11, No. 7. – P. 634-643.

101. Parent C. An entity-relationship algebra / C. Paren, S. Spaccapietra // Data Engineering: international conference, April 24-27, 1984, Los Angeles, California: proceedings. – 1984. – P. 500-507.

102. Parent C. An ER calculus for the entity-relationship complex model / C. Paren, H. Rolin, K. Yetongnon, S. Spaccapietra // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 8-10, 1990, Lausanne, Switzerland: proceedings. – 1990. – P. 361-384.

103. Rochfeld A. Merise: An information system design and development methodology / A. Rochfeld, H. Tardieu // Information Manag. – 1983. – Vol. 6. – P. 143-159.

104. Roesner W. DESPATH: an ER manipulation language / W. Roesner // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 29-30, 1985, Chicago, Illinois, USA: proceeding. – 1985. – P. 72-81.

105. Rumbaught J. The unified modeling language reference manual / J. Rumbaught, I. Jacobson, G. Booch. – Pearson: Addison-Wesley, 1999. – 1030 p.

106. Smith J. Database abstractions: Aggregation and generalization / J. Smith, D. Smith // ACM Transactions on Database Systems. – 1977. – P. 105-133.

107. Song I.-Y. A comprehensive analysis of entity-relationship diagrams / I.-Y. Song, M. Evans, E. Parc // Journal Computer Software Engineering. – 1995. – Vol. 3. – P. 427-459.

108. Spaccapietra S. ERC+: an object + relationship environment for database applications [Електронний ресурс] / S. Spaccapietra, C. Parent, M. Sunye, K. Yetongnon, A. Dileva // Readings in Object-Oriented Systems and Applications, IEEE CS Press, 1995. – 40 p. – Режим доступу: http://lbdwww.epfl.ch/e/publications_new/articles.pdf/ERC+.pdf.

109. Spencer R. ER standards proposal / R. Spencer, T. Teorey, E. Hevia // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 8-10, 1990, Lausanne, Switzerland: proceedings. – 1990. – P. 405-412.

110. Subieta K. Denotational semantics of query languages / K. Subieta // Information systems. – 1987. – Vol. 12, No.3. – P. 62-82.

111. Subieta K. Semantics of query language for the entity-relationship model / K. Subieta, M. Missala // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, September 13-18, 1986, Dijon, France: proceeding. – 1986. – P. 197-216.

112. Teorey T.J. Database modeling and design / T.J. Teorey. – San Francisco: Morgan Kaufmann CA, 1998. – 364 p.

113. Teorey T.J. Logical Design Methodology for Relational Databases. Using the Extended Entity-Relationship Model / T.J. Teorey, D. Yang, J.P. Fry // Computing Surveys. – 1986 – Vol. 18, No. 2. – P. 197-222.

114. Thalheim B. Foundations of entity-relationship modeling / B. Thalheim // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. – 1992. – Vol. 6. – P. 1-34.

115. Thalheim B. Fundamentals of cardinality constraints / B. Thalheim // Entity-Relationship Approach: international conference, October 7-9, 1992, Karlsruhe, Germany: proceeding. – 1992. – P. 7-23.

116. Thalheim B. Fundamentals of entity-relationship modeling / B. Thalheim. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 519 p.

117. Ulman J. A first course in database systems / J. Ulman, J. Widom. – New Jersey: Prentice Hall, 1997. – 470 p.

118. Ursprung P. HIQUEL: an interactive query language to define and use hierarchies / P. Ursprung, C. Zender // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California: proceeding. – 1983. – P. 299-314.

119. Westmount I-CASE: [User Manual] – Netherlands: Westmount Technology B.V, 1994. – 246 p.

120. www.conceptualmodeling.org.

121. www.erwin.ru.

122. www.oracle.com/technology/products/designer/index.html.

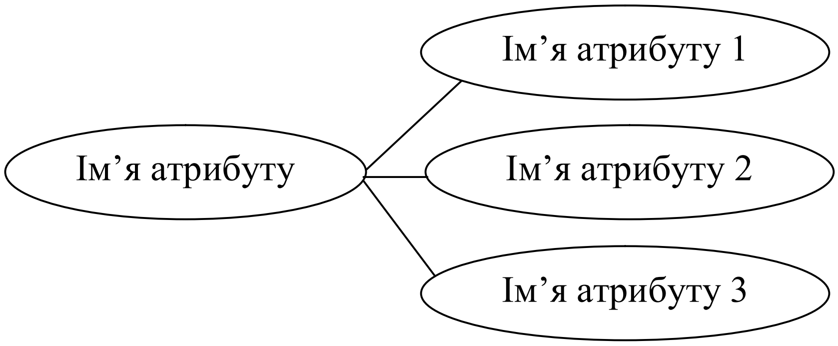
123. www.silverrun.com.

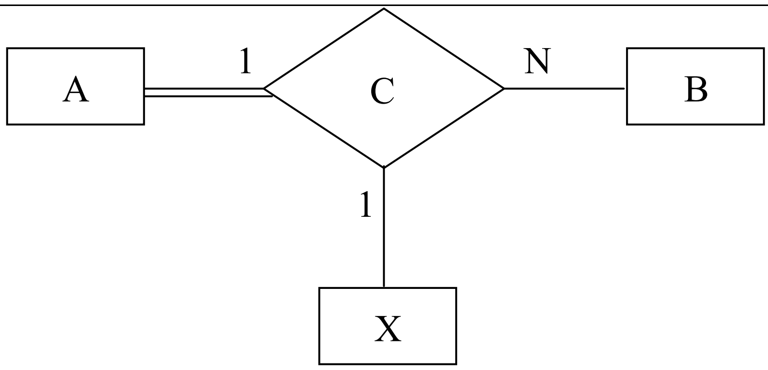
124. Yourdon E. Modeling structured analysis / E. Yourdon. – New Jersey: Prentice Hall, 1989. – 186 p.

125. Zhang Z. A graphical query language for entity-relationship databases / Z. Zhang, A. Mendelzon // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, October 10-15, 1983, Anaheim, California, USA: proceeding. – 1983. – P. 441-448.

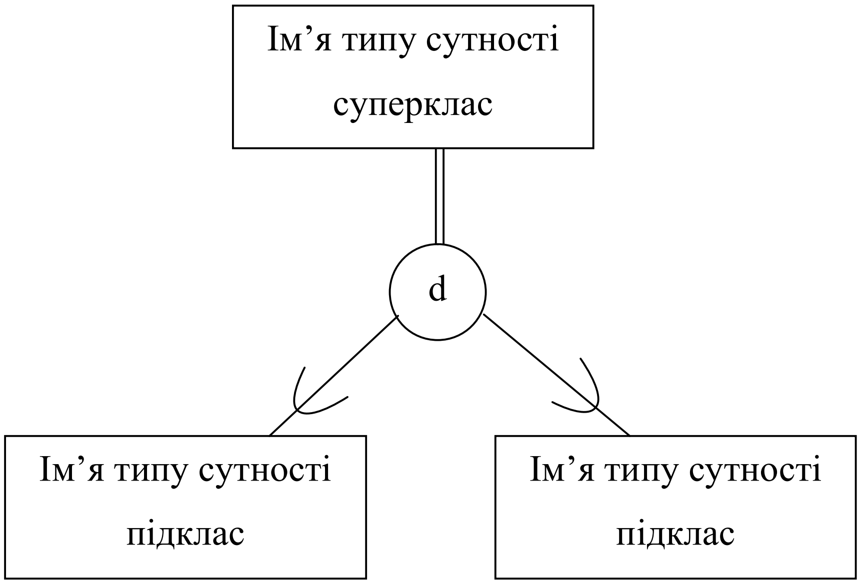
Додаток А. Конструктивні елементи діаграм „сутність-зв’язок” в різних нотаціях

Елементи діаграми „сутність-зв’язок” та їх опис в нотації Чена [67]	
Ім’я типу сутності	Сильний тип сутності
Ім’я типу сутності	Слабкий тип сутності
Ім’я типу зв’язку	Сильний тип зв’язку
Ім’я типу зв’язку	Слабкий тип зв’язку
Ім’я атрибуту	Атрибут
Ім’я атрибуту	Ключ
Ім’я атрибуту	Багатозначний атрибут
Ім’я атрибуту	Похідний атрибут

<table>
<tr><td>
</td><td>Складовий атрибут</td></tr>
<tr><td colspan="2">

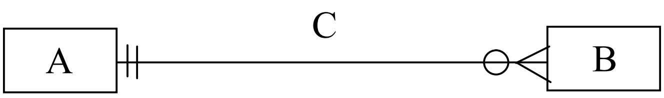
Позначення значень max обмеження кардинальності типу зв’язку: 1 – „один”, N – „багато”</td></tr>
<tr><td colspan="2">

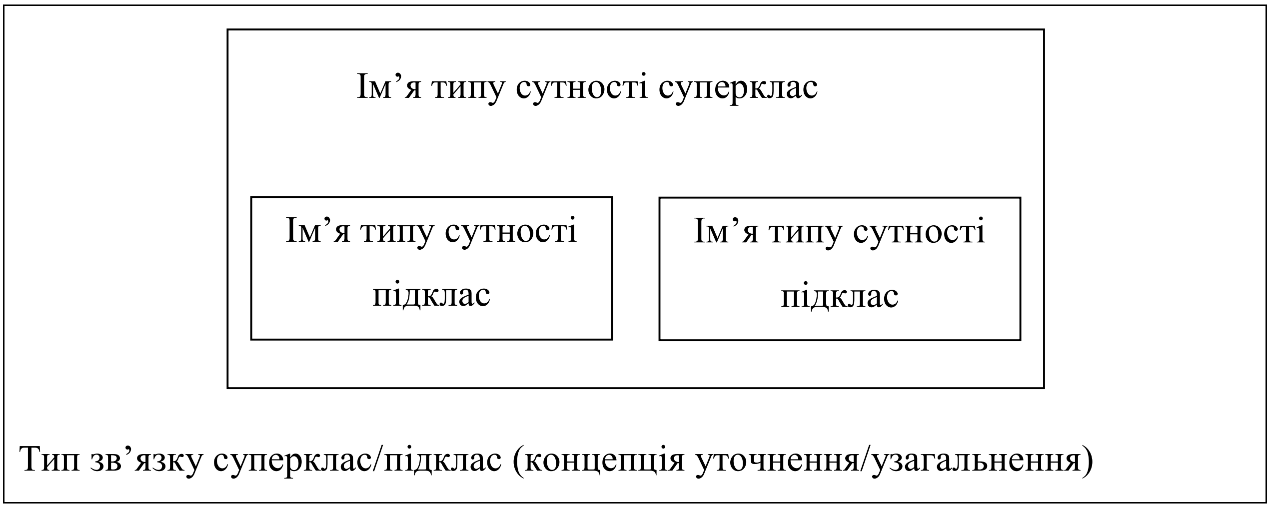
Позначення значень mop обмеження кардинальності типу зв’язку: одинарна лінія – „необов’язкове”, подвійна лінія – „обов’язкове”
(тип зв’язку C „один до одного до багатьох” з обов’язковою участю типу сутності A і необов’язковою участю типів сутностей B та X)</td></tr>
</table>



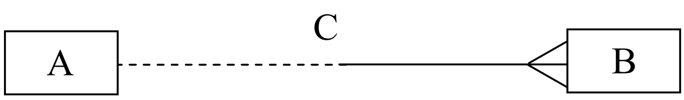
Тип зв’язку суперклас/підклас (концепція уточнення/узагальнення). Літера у колі позначає значення обмеження неперетину, яке застосовують до типу сутності суперклас та його типів сутностей підклас: „d” позначає неперетинаюче обмеження, а „o” – перетинаюче. За допомогою лінії, яка з’єднує коло та тип сутності суперклас, показується обмеження участі: подвійна лінія – обов’язкова участь, одинарна лінія – необов’язкова участь

<table>
<tr><th colspan="2">Елементи діаграми „сутність-зв’язок” та їх опис в нотації Мартіна [21]</th></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Сильний тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Слабкий тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу зв’язку</td><td>Тип зв’язку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ім’я типу сутності
Ім’я атрибута 1
Ім’я атрибута 2
{Ім’я атрибута 3}
....
Ім’я атрибута n

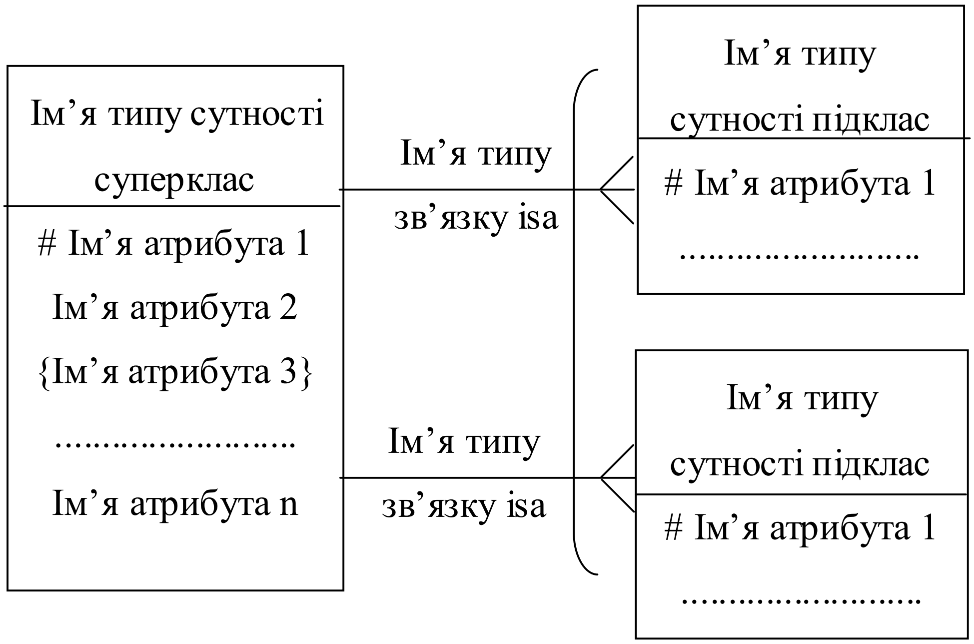
Атрибути перераховуються у нижній частині позначення типу сутності. Первиний ключ підкреслюється. Багатозначні атрибути поміщаються у фігурні дужки</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Позначення значень min та max обмежень кардинальності типу зв’язку: коло – „нуль”, одна риска – „один”, „лапка” – „багато”. (значення min та max обмежень кардинальності типу зв’язку C для типу сутності A – (1,1), а для типу сутності B – (0,M)</td></tr>
</table>


Ім’я типу сутності суперклас
Ім’я типу сутності підклас
Ім’я типу сутності підклас
Тип зв’язку суперклас/підклас (концепція уточнення/узагальнення)

<table>
<tr><th colspan="2">Елементи діаграми „сутність-зв’язок” та їх опис в нотації Баркера [47]</th></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу зв’язку</td><td>Тип зв’язку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ім’я типу сутності
Ім’я атрибута 1
Ім’я атрибута 2
{Ім’я атрибута 3}
....
Ім’я атрибута n

Атрибути перераховуються у нижній частині позначення типу сутності. Первиний ключ позначається #. Багатозначні атрибути поміщаються у фігурні дужки</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Позначення значень max обмеження кардинальності типу зв’язку: одинарна лінія – „один”, лінія з так, так званою, „лапкою” – „багато”; позначення значень mор обмеження кардинальності типу зв’язку: пунктирна лінія – „необов’язкове”, суцільна лінія – „обов’язкове”
(тип зв’язку C „один до багатьох” з обов’язковою участю типу сутності B та необов’язковою участю типу сутності A)</td></tr>
</table>

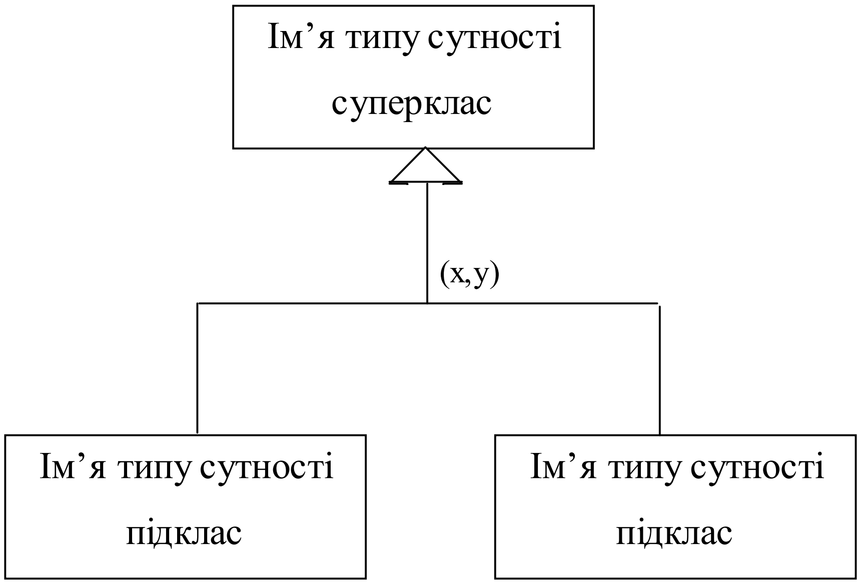


Тип зв’язку суперклас/підклас (концепція уточнення/узагальнення): використовується елемент „дуга” для об’єднання всіх типів зв’язку isa, які пов’язують єдиний тип сутності суперклас та його типи сутностей підклас.

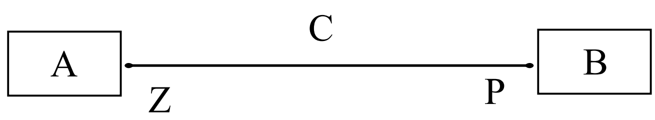
<table>
<tr><th colspan="2">Елементи діаграми „сутність-зв’язок” та їх опис в нотації UML [12]</th></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу зв’язку</td><td>Бінарний тип зв’язку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ім’я типу сутності — Min..Max — Ім’я типу зв’язку — Min..Max — Ім’я типу сутності

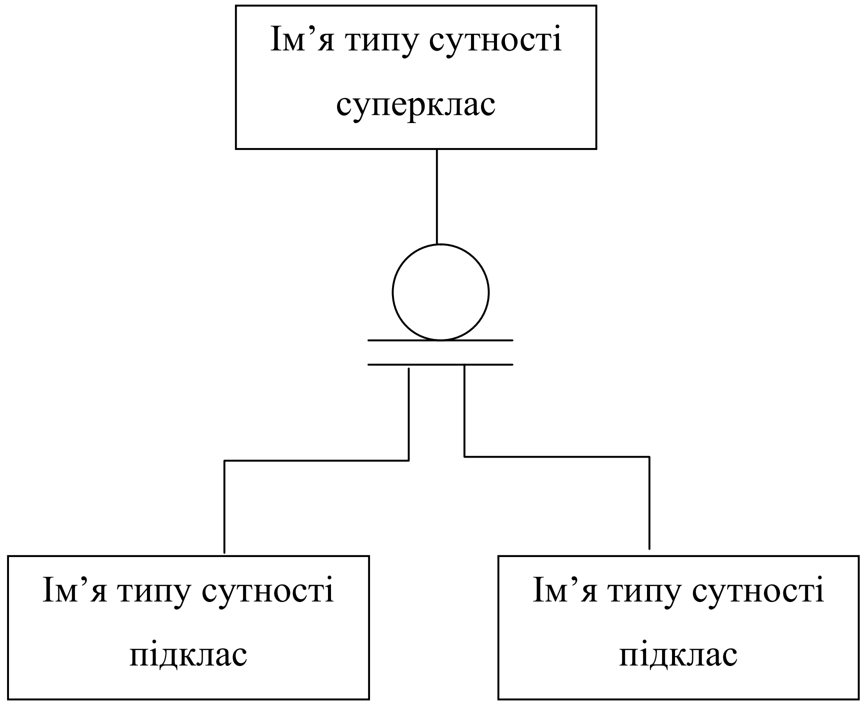
Позначення значень min та max обмежень кардинальності типу зв’язку.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ім’я типу сутності
Ім’я атрибута 1 {PK}
Ім’я атрибута 2 {AK}
Ім’я атрибута 3
    Ім’я атрибута 4
    Ім’я атрибута 5
/ Ім’я атрибута 6
....
Ім’я атрибута n {min..max}

Тип сутності з атрибутами. Атрибут первинного ключа позначається як {PK}. Всі атрибути альтернативного ключа позначаються як {AK}. Компоненти складового атрибута перераховуються під ним і виділяються відступом управо. Похідні атрибути позначаються знаком / перед ім’ям атрибута. Багатозначні атрибути характеризуються існуванням діапазону допустимих значень {mn..max}</td></tr>
</table>



Тип зв’язку суперклас/підклас (концепція уточнення/узагальнення). Пара (x,y) показує значення обмежень неперетину та участі, яке застосовують до типу сутності суперклас та його типів сутностей підклас: x приймає значення „optional” (необов’язкове) або „mandatory” (обов’язкове), а y – „disjoint” (неперетинаюче) або „overlapping” (перетинаюче)

<table>
<tr><td colspan="2">Елементи діаграми „сутність-зв’язок” та їх опис в нотації IDEF1X [29, 90]</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Сильний тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу сутності</td><td>Слабкий тип сутності</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу зв’язку</td><td>Сильний тип зв’язку</td></tr>
<tr><td>Ім’я типу зв’язку</td><td>Слабкий тип зв’язку</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Позначення значень min та max обмежень кардинальності типу зв’язку: одинарна лінія – (1,1), лінія з крапкою – (0,M), лінія з крапкою та літерою Z – (0,1), лінія з крапкою та літерою P – (1,M); лінія з крапкою та числом N – (N,N), де N – деяке натуральне число, лінія з крапкою та діапазоном M-N – (M,N). (тип зв’язку C „один до багатьох” в напрямку від типу сутності A до типу сутності B з необов’язковою участю типу сутності A та обов’язковою участю типу сутності B, або іншими словами min та max обмежень кардинальності (обмеженої кардинальності) типу зв’язку C для типу сутності A – (0,1), а для типу сутності B – (1,M).</td></tr>
</table>



Тип зв’язку суперклас/підклас (концепція уточнення/узагальнення). За допомогою ліній, які знаходяться під колом, показується обмеження участі, яке застосовують до типу сутності суперклас та його типів сутностей підклас: подвійна лінія – обов’язкова участь, одинарна лінія – необов’язкова участь.

Додаток Б. Доведення теореми 3.1 про про сумісність значень операторів $\mathbf{min}$, $\mathbf{max}$ на взаємоінверсних відношеннях

Доведення. Як зазначалося в третьому розділі, заповнення таблиці 3.4 симетричне відносно головної діагоналі, тому доведенню підлягають тільки заповнення комірок, розташованих, для визначення, на головній діагоналі та вище неї. Номер варіанту будемо записувати як (i,j), де i номер рядка, а j номер стовпця.

Заповнення першого рядка (та першого стовпчика) випливає з п. 5 леми 3.1 про характеристичну ознаку порожнього відношення. Очевидно, що в першому рядку існує відповідне відношення (а саме порожнє відношення) тільки для випадку (1,1). ▫

Відношення для решти випадків будуються об'єднанням скінчених універсальних відношень (лема 3.2) з використанням леми 3.4; причому бінарні відношення, які складають об'єднане відношення в формулюванні цієї леми, взагалі не будуть перетинатися, тобто будуть автоматично попарно сумісними.

Для випадку (2,2), треба розглянути універсальне відношення $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, де $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, причому елементи $x_1, \ldots, x_p$ та $y_1, \ldots, y_k$ покладаються попарно різними (див. рисунок 1).

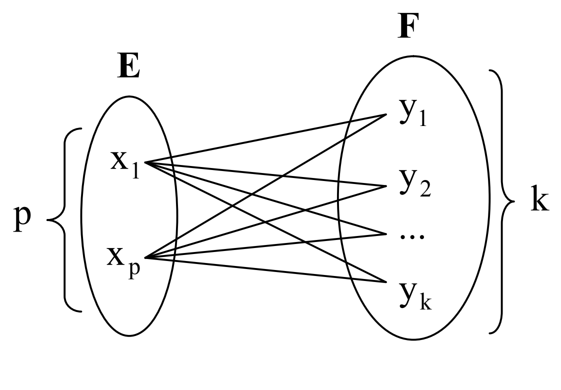


Рис. Б.1. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (2,2)

Згідно леми 3.2 про універсальне відношення відношення $\mathbf{R}$ потрібне. ▫

Для випадку (2,3) будується відношення $\mathbf{R} \overset{def}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{F}'$, де $\mathbf{E} \overset{def}{=} \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ та $\mathbf{F} \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k, y\}$, $\mathbf{F}' \overset{def}{=} \{y_1, y_2, ..., y_k\} = \mathbf{F}\setminus\{y\}$, причому елементи $x_1,...,x_p$ та $y_1,...,y_k,y$ покладаються попарно різними(див. рисунок 2).

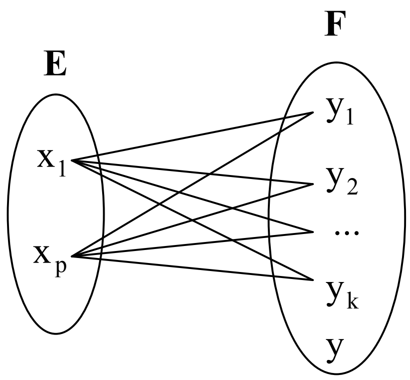


Рис. Б.2. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (2,3)

Згідно леми 3.2 (про універсальне відношення) та леми 3.3 (про залежність від множини-параметра, ця лема застосовується для відношення $\mathbf{R}^{-1}$) відношення $\mathbf{R}$ потрібне. ▫

Для випадку (2,4) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{def}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_i \overset{def}{=} U(i,k) = \{x_1^i,...,x_i^i\}\times\{y_1^i,...,y_k^i\}$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, y покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{def}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_i^i, ...\}$ та $\mathbf{F} \overset{def}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) \bigcup \{y\} = \{y_1^1, ... y_k^1, y_1^2, ... y_k^2, ..., y_1^i, ... y_k^i, ..., y\}$ (див. рисунок 3). Далі необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

Нехай $\mathbf{E}_i \overset{def}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_i = \{x_1^i,...,x_i^i\}$ для $i = 1,2,...$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемою 3.4 (про об'єднання попарно сумісних відношень) та лемою 3.2 (про значення операторів $\mathbf{min}, \mathbf{max}$ на скінченному універсальному відношенні) отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=1,2,\dots} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod_{i=1,2,\dots} k = k$.

Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \prod_{i=1,2,\dots} \mathbf{min}_{\mathbf{E}i}(\mathbf{R}_i) = \prod_{i=1,2,\dots} k = k$.

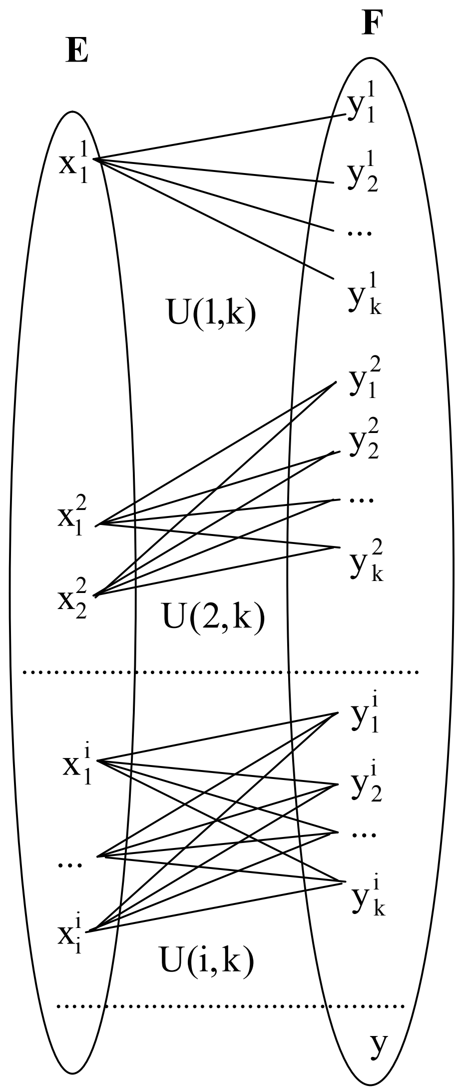


Рис. Б.3. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (2,4)

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане.

Нехай $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i,\dots y_k^i\}$ для $i = 1,2,\dots$ та $\mathbf{F}' \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^1,\dots y_k^1, y_1^2,\dots y_k^2,\dots, y_1^i,\dots y_k^i,\dots\} = \mathbf{F} \setminus \{y\}$. Тоді згідно з лемою 3.4 та лемою 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=1,2,\dots} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod_{i=1,2,\dots} i = \infty$.

Нарешті з леми 3.3 про залежність від множини-параметра (нагадаймо, що $\mathbf{F}' \subset \mathbf{F}$) випливають рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = 0$.

Зауважимо, що неявно вище була використана дистрибутивність операції побудови оберненого відношення відносно об'єднань: $(\bigcup_i \mathbf{R}_i)^{-1} = \bigcup_i \mathbf{R}_i^{-1}$; ця властивість буде застосовуватися і надалі. ▫

Для випадку (2,5), відношення $\mathbf{R}$ будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} U(p',k) \cup U(p,k)$, де $U(p',k) \overset{\text{def}}{=} \{x_1,...,x_{p'}\} \times \{y_1,...,y_k\}$ та $U(p,k) \overset{\text{def}}{=} \{x'_1,...,x'_p\} \times \{y'_1,...,y'_k\}$; далі, покладається $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2,..., x_{p'}, x'_1, x'_2,..., x'_p\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{y_1, y_2,..., y_k, y'_1, y'_2,..., y'_k\}$, причому елементи вигляду x_i, x'_j та y_i, y'_j попарно різні (див. рисунок 4). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

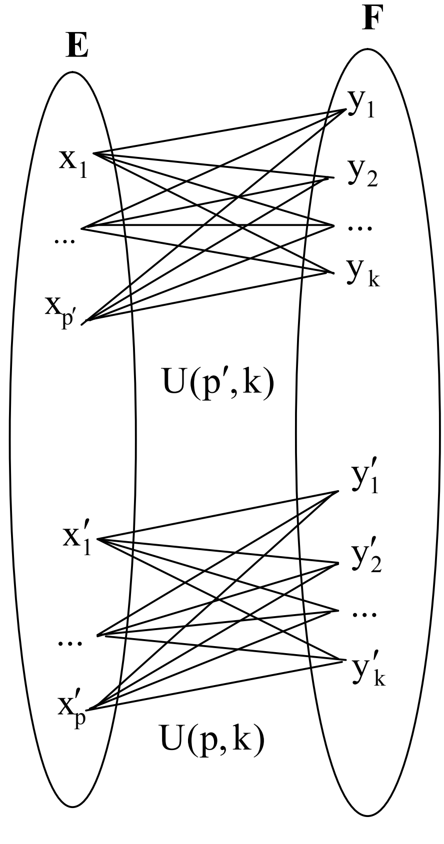


Рис. Б.4. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (2,5)

Нехай $\mathbf{E}_1 \overset{\text{def}}{=} \{x_1,\ldots,x_{p'}\}$ та $\mathbf{E}_2 \overset{\text{def}}{=} \{x'_1,\ldots,x'_p\}$, а також $\mathbf{F}_1 \overset{\text{def}}{=} \{y_1,\ldots,y_k\}$ та $\mathbf{F}_2 \overset{\text{def}}{=} \{y'_1,\ldots,y'_k\}$. Так як проекції за першою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,k)$ не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{E}_1}U(p',k), \mathbf{max}_{\mathbf{E}_2}U(p,k)\} = \coprod\{k,k\} = k$. Аналогічно встановлюються рівності

$$\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{E}_1}U(p',k), \mathbf{min}_{\mathbf{E}_2}U(p,k)\} = \prod\{k,k\} = k.$$

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Так як проекції за другою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,k)$ не перетинаються, то згідно з тими самими лемами 3.4, 3.2 (враховуючи, що відношення, обернене до універсального відношення, знову буде універсальним; цей очевидний факт буде використовуватись і далі) отримуються рівності $\begin{aligned}&\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1}(U(p',k)^{-1}), \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2}(U(p,k)^{-1})\} = \\ &= \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1}U(k,p'), \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2}U(k,p)\} = \coprod\{p',p\} = p\end{aligned}$.

Аналогічно встановлюються рівності

$$\begin{aligned}&\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1}(U(p',k)^{-1}), \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2}(U(p,k)^{-1})\} = \\ &= \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1}U(k,p'), \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2}U(k,p)\} = \prod\{p',p\} = p'\end{aligned} \quad \square$$

Для випадку (2,6) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} U(p'+i-1,k) = \{x_1^i,\ldots,x_{p'+i-1}^i\} \times \{y_1^i,\ldots,y_k^i\}$, $i = 1,2,3,\ldots$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^1,\ldots,x_{p'}^1, x_1^2,\ldots,x_{p'+1}^2,\ldots,x_1^i,x_2^i,\ldots,x_{p'+i-1}^i,\ldots\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^1,\ldots y_k^1, y_1^2,\ldots y_k^2,\ldots,y_1^i,\ldots,y_k^i,\ldots\}$ (див. рисунок 5). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

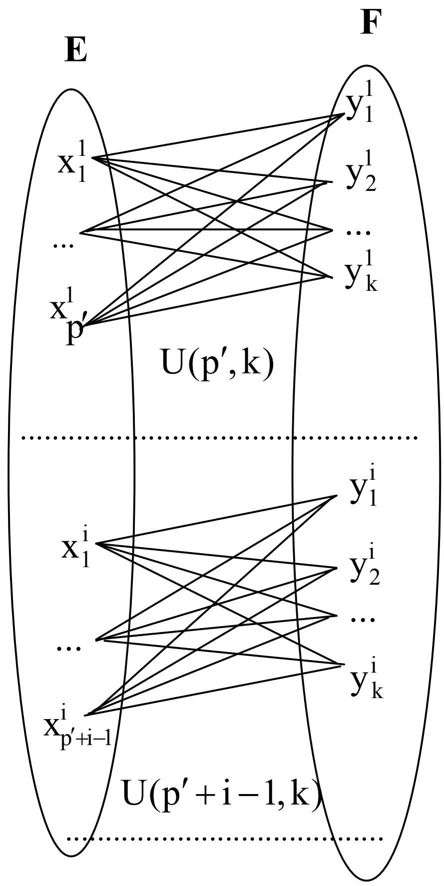


Рис. Б.5. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (2,6)

Нехай $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2 \mathbf{R}_i = \{x_1^i, ..., x_{p'+i-1}^i\}$ для $i = 1,2,3...$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max_E}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod_{i=1,2,...} k = k$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min_E}(\mathbf{R}) = \prod_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{E}i}(\mathbf{R}_i) = \prod_{i=1,2,...} k = k$.

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i, ..., y_k^i\}$ для $i = 1,2,...$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max_F}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod_{i=1,2,...} (p' + i - 1) = \coprod \{p', p'+1, p'+2, ...\} = \infty$.

Аналогічно встановлюються рівності

$\mathbf{min_F}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod_{i=1,2,...} (p' + i - 1) = \prod \{p', p'+1, p'+2, ...\} = p'$. ▫

Для випадку (3,3), одного з найпростіших, відношення будується так: $\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{U}(p,k) = \{x_1,\ldots,x_p\} \times \{y_1,\ldots,y_k\}$, $\mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) \bigcup \{x\} = \{x_1,\ldots,x_p,x\}$ та $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) \bigcup \{y\} = \{y_1,\ldots,y_k,y\}$, причому елементи $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_k,x,y$ вважаються попарно різними (див. рисунок 6).

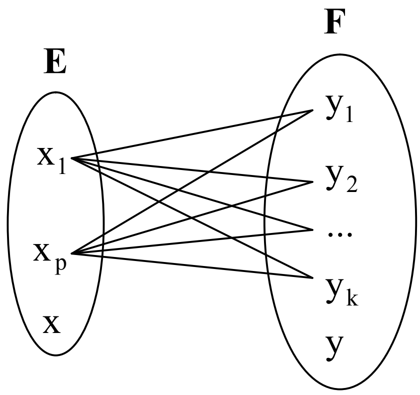


Рис. Б.6. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (3,3)

Необхідно показати, що відношення $\mathbf{R}$ шукане. Нехай $\mathbf{E}' \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1,\ldots,x_p\}$; згідно з лемою 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = k$, а згідно з лемою 3.3 та власним включенням $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$ – $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = k$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = 0$.

Відповідні рівності для оберненого відношення $\mathbf{R}^{-1}$ доводяться повністю аналогічно. ▫

Для випадку (3,4) відношення будується так: $\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{U}(1,k) = \{x^0\} \times \{y_1^0,\ldots,y_k^0\}$ та для $i = 1,2,3,\ldots$ $\mathbf{R}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{U}(i,1) = \{x_1^i,\ldots,x_i^i\} \times \{y^i\}$, причому елементи вигляду $x^0, x_j^i, y_j^0, y^i, x, y$ покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) \cup \{x\} = \{x^0, x_1^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1^i, x_2^i, \ldots, x_i^i, \ldots, x\}$ та

$\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) \cup \{y\} = \{y_1^0,...y_k^0, y^1, y^2,..., y^i,..., y\}$ (див. рисунок 7). Необхідно показати, що відношення $\mathbf{R}$ шукане.

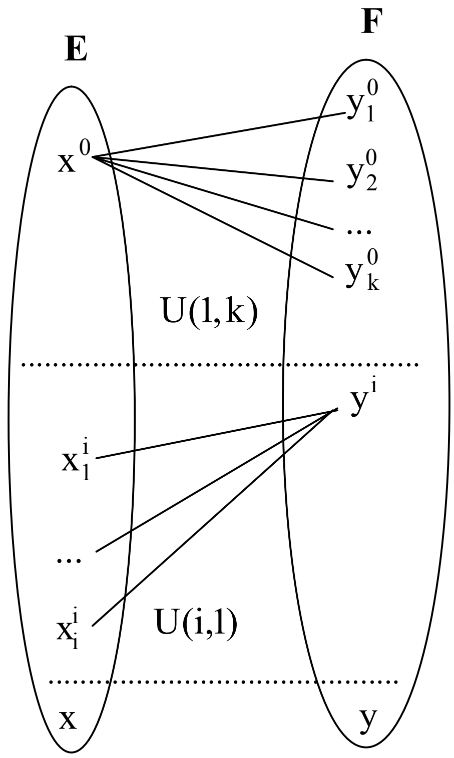


Рис. Б.7. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (3,4)

Нехай $\mathbf{E}_0 \overset{\text{def}}{=} \{x^0\}$ та $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2 \mathbf{R}_i = \{x_1^i,...,x_i^i\}$ для $i = 1,2,3...$, а також $\mathbf{E}' \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x^0, x_1^1, x_1^2, x_2^2,..., x_1^i, x_2^i,..., x_i^i,...\}$. Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 0,1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod\{k,1\} = k$ (нагадаймо, що $k \geq 1$ за припущенням для випадку (3,4)). Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \prod_{i=0,1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \prod\{k,1\} = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$ не суттєве, бо при розширенні множини-параметра це значення стане нульовим; надалі також будемо діяти аналогічним чином).

Залишається застосувати лему 3.3, враховуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$: $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = k$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Покажимо, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_0) = \{y_1^0,...,y_k^0\}$, $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}_i) = \{y^i\}$ для $i = 1,2,...$ та $\mathbf{F}' \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^0,...,y_k^0,...,y^i,...\}$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod\limits_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} i = \coprod\{1,2,3,...,i,...\} = \infty$.

Нарешті, застосовуючи лему 3.3 та враховуючи власне включення $\mathbf{F}' \subset \mathbf{F}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = 0$ (згідно з цією лемою не треба знаходити конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1})$, бо лема гарантує нульове значення оператора $\mathbf{min}$ при власному розширенні множини-параметра). ▫

Для випадку (3,5), який розглядається аналогічно випадку (2,5), відношення $\mathbf{R}$ будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} U(p',k) \cup U(p,l)$, де $U(p',k) \overset{\text{def}}{=} \{x_1,...,x_{p'}\} \times \{y_1,...,y_k\}$ та $U(p,l) \overset{\text{def}}{=} \{x_1',...,x_p'\} \times \{y'\}$; далі, покладаємо $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2,..., x_{p'}, x_1', x_2',..., x_p', x\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{y_1, y_2,..., y_k, y'\}$, причому елементи вигляду x_i, x_j', x, y_i, y' покладаються попарно різними (див. рисунок 8). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

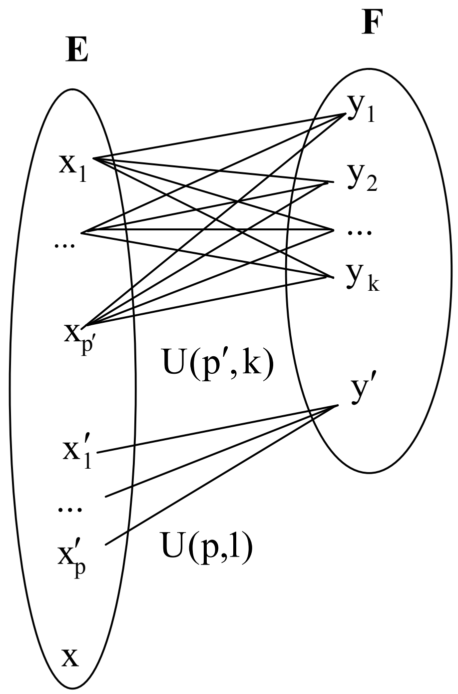


Рис. Б.8. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (3,5)

Нехай $\mathbf{E}_1 \overset{\text{def}}{=} \{x_1,...,x_{p'}\}$, $\mathbf{E}_2 \overset{\text{def}}{=} \{x'_1,...,x'_p\}$ та $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$, а також $\mathbf{F}_1 \overset{\text{def}}{=} \{y_1,...,y_k\}$ та $\mathbf{F}_2 \overset{\text{def}}{=} \{y'\}$. Так як проекції за першою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,1)$ не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{E}_1} U(p',k), \mathbf{max}_{\mathbf{E}_2} U(p,1)\} = \coprod\{k,1\} = k$ (нагадаймо, що для випадку (3,5) виконується за припущенням нерівність $k > 1$). Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{E}_1} U(p',k), \mathbf{min}_{\mathbf{E}_2} U(p,1)\} = \prod\{k,1\} = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R})$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3.3 і враховуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = k$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Так як проекції за другою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,1)$ не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності

$$\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1}(U(p',k))^{-1}, \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2}(U(p,1))^{-1}\} =$$
$$= \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1} U(k,p'), \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2} U(1,p)\} = \coprod\{p',p\} = p.$$

Аналогічно встановлюються рівності

$$\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1}(\mathrm{U}(p',k))^{-1}, \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{U}(p,1))^{-1}\} =$$
$$= \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1}\mathrm{U}(k,p'), \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2}\mathrm{U}(1,p)\} = \prod\{p',p\} = p'.$$

Для випадку (3,6) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{U}(p',k) = \{x_1^0,\dots,x_{p'}^0\}\times\{y_1^0,\dots,y_k^0\}$ та $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} \mathrm{U}(p'+i,1) = \{x_1^i,\dots,x_{p'+i}^i\}\times\{y^i\}$, для $i = 1,2,3,\dots$; причому елементи вигляду x_j^i, y_j^0, y^i, x покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R})\bigcup\{x\} = \{x_1^0,\dots,x_{p'}^0,x_1^1,\dots,x_{p'+1}^1,\dots,x_1^i,x_2^i,\dots,x_{p'+i}^i,\dots,x\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^0,\dots y_k^0,y^1,y^2,\dots,y^i,\dots\}$ (див. рисунок 9). Необхідно показати, що так побудоване відношення **R** шукане.

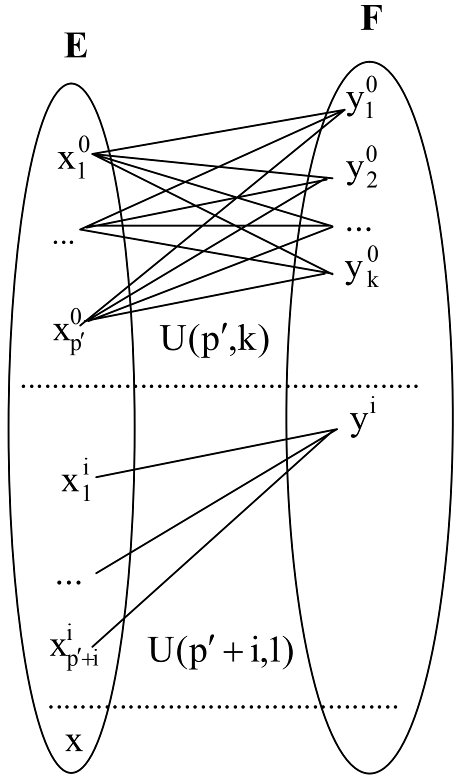


Рис. Б.9. Приклад відношення **R** для випадку (3,6)

Нехай $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2 \mathbf{R}_i = \{x_1^i,...,x_{p'+i}^i\}$ для $i = 0,1,2,3...$ та $\mathbf{E}' \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0, x_1^1,...,x_{p'+1}^1,...,x_1^i,...,x_{p'+i}^i,....\}$. Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 0,1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod\{k,l\} = k$ (нагадаймо, що для випадку (3,6) виконується нерівність $k \geq 1$ за припущенням). Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \prod_{i=0,1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{E}i}(\mathbf{R}_i) = \prod\{k,l\} = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3.3 і врахувуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = k$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Далі необхідно показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_0) = \{y_1^0,...,y_k^0\}$ та $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y^i\}$ для $i = 1,2,...$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності

$$\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,...}(p'+i) = \coprod\{p', p'+1, p'+2,...\} = \infty .$$

Аналогічно встановлюються рівності

$$\min_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,...} \min_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,...}(p'+i) = \prod\{p', p'+1, p'+2,...\} = p' . \ \square$$

Для випадку (4,4) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} U(i,i) = \{x_1^i,...,x_i^i\} \times \{y_1^i,...,y_i^i\}$, для $i = 1,2,3,...$; причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, x, y покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) \bigcup \{x\} = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2,..., x_1^i, x_2^i,..., x_i^i,..., x\}$ та

$\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) \cup \{y\} = \{y_1^1, y_1^2, y_2^2, ..., y_1^i, ..., y_i^i, ..., y\}$ (див. рисунок 10). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

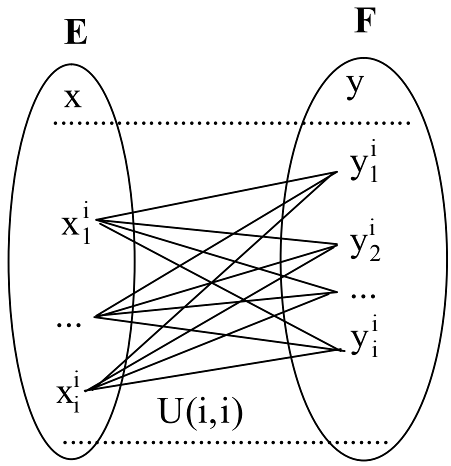


Рис. Б.10. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (4,4)

Нехай $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2 \mathbf{R}_i = \{x_1^i, ..., x_i^i\}$ для $i = 1,2,3...$ та $\mathbf{E}' \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_1^i, x_2^i, ..., x_i^i, ...\}$. Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod\limits_{i=1,2,...} i = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \prod\limits_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \prod\limits_{i=1,2,...} i = 1$ (необхідно зауважимо, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3.3 і враховуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Тепер необхідно показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}' \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^1, y_1^2, y_2^2, ..., y_1^i, ..., y_i^i, ...\}$ та $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i, ..., y_i^i\}$ для $i = 1,2,...$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod\limits_{i=1,2,...} i = \infty$.

Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod\limits_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod\limits_{i=1,2,...} i = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1})$ несуттєве).

Залишається застосувати лему 3.3 з врахуванням власного включення $\mathbf{F}' \subset \mathbf{F}$: $\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{max}_{\mathbf{F}'}(\mathbf{R}^{-1}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = 0$. ▫

Для випадку (4,5) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_0 \overset{\text{def}}{=} U(p',1) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\} \times \{y^0\}$ та $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} U(p,i) = \{x_1^i,...,x_p^i\} \times \{y_1^i,...,y_i^i\}$, для $i = 1,2,3,...$; причому елементи вигляду $x_j^0, x_j^i, y^0, y_j^i, x$ покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) \bigcup \{x\} = \{x_1^0,...,x_{p'}^0, x_1^1,...,x_p^1,...,x_1^i, x_2^i,...,x_p^i,...,x\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y^0, y_1^1, y_1^2, y_2^2,...,y_1^i,...,y_i^i,...\}$ (див. рисунок 11). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

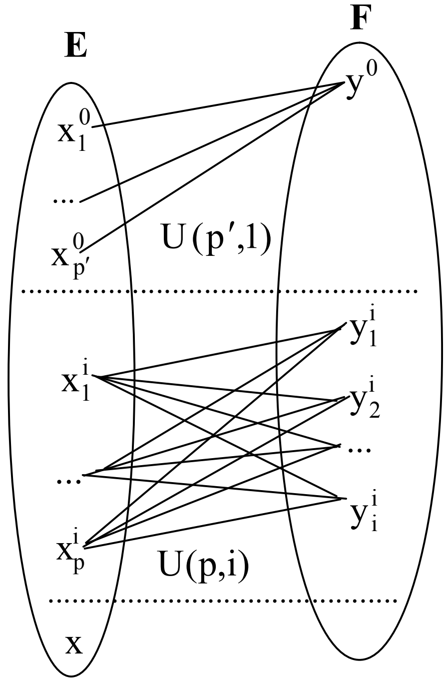


Рис. Б.11. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (4,5)

Нехай $\mathbf{E}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_0 = \{x_1^0,\dots,x_{p'}^0\}$, $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_i = \{x_1^i,\dots,x_p^i\}$ для $i = 1,2,3...$ та $\mathbf{E}' \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^0,\dots,x_{p'}^0,x_1^1,\dots,x_p^1,\dots,x_1^i,x_2^i,\dots,x_p^i,\dots\}$. Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 0,1,2,\dots$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=0,1,2,\dots} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod_{i=1,2,\dots} i = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \prod_{i=0,1,2,\dots}\mathbf{min}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \prod_{i=1,2,\dots} i = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3.3 і враховуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Тепер необхідно показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_0) = \{y^0\}$ та $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i,\dots,y_i^i\}$ для $i = 1,2,\dots$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,\dots} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod\{p',p\} = p$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,\dots} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod\{p',p\} = p'$.▫

Для випадку (4,6) відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} U(p'+i-1,i) = \{x_1^i,\dots,x_{p'+i-1}^i\} \times \{y_1^i,\dots,y_i^i\}$, $i = 1,2,3,\dots$, причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i, x покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) \cup \{x\} = \{x_1^1,\dots,x_{p'}^1 x_1^2,\dots,x_{p'+1}^2,\dots,x_1^i,x_2^i,\dots,x_{p'+i-1}^i,\dots,x\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^1,y_1^2,y_2^2,\dots,y_1^i,\dots,y_i^i,\dots\}$ (див. рисунок 12). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

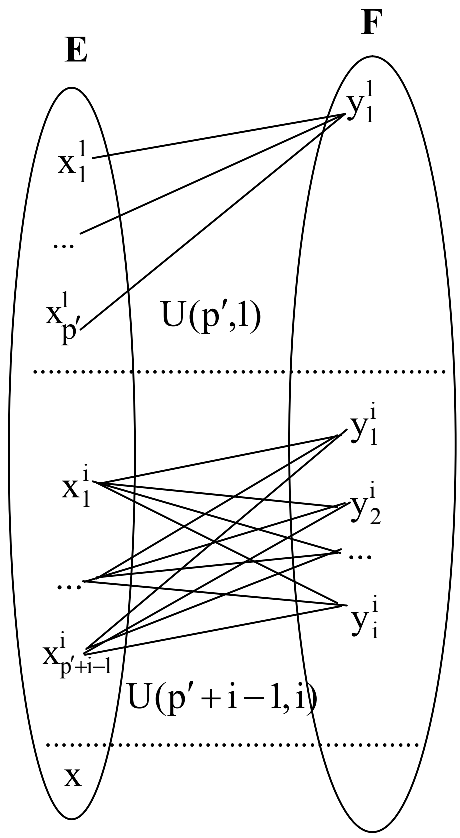


Рис. Б.12. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (4,6)

Нехай $\mathbf{E}' \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^1,...,x_{p'}^1, x_1^2,...,x_{p'+1}^2,...,x_1^i,x_2^i,...,x_{p'+i-1}^i,...\}$ та $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_i = \{x_1^i,...,x_{p'+i-1}^i\}$ для $i = 1,2,3...$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod_{i=1,2,...} i = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \prod_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \prod_{i=1,2,...} i = 1$ (необхідно зауважити, що насправді знайдене конкретне значення $\mathbf{min}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R})$ несуттєве).

Застосовуючи лему 3.3 і враховуючи власне включення $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \mathbf{max}_{\mathbf{E}'}(\mathbf{R}) = \infty$ та $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = 0$.

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i,...,y_i^i\}$ для $i = 1,2,3...$; тоді згідно з лемами 3.4, 3.2

отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod_{i=1,2,...}(p'+i-1) = \coprod\{p', p'+1, p'+2, ...\} = \infty$.

Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod_{i=1,2,...}(p'+i-1) = \prod\{p', p'+1, p'+2, ...\} = p'$. ▫

Для випадку (5,5), подібного до випадку (2,5), відношення $\mathbf{R}$ будується так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} U(p',k') \cup U(p,k)$, де $U(p',k') \overset{\text{def}}{=} \{x_1,...,x_{p'}\} \times \{y_1,...,y_{k'}\}$ та $U(p,k) \overset{\text{def}}{=} \{x'_1,...,x'_p\} \times \{y'_1,...,y'_k\}$; далі, покладемо $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \{x_1, x_2, ..., x_{p'}, x'_1, x'_2, ..., x'_p\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{y_1, y_2, ..., y_{k'}, y'_1, y'_2, ..., y'_k\}$, причому елементи вигляду x_i, x'_j та y_i, y'_j попарно різні (див. рисунок 13). Покажемо, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

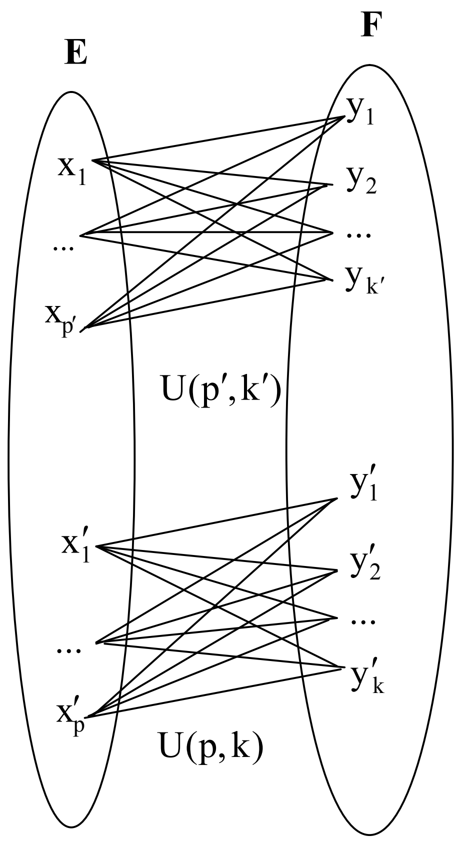


Рис. Б.13. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (5, 5)

Нехай $\mathbf{E}_1 \overset{def}{=} \{x_1,...,x_{p'}\}$, $\mathbf{E}_2 \overset{def}{=} \{x'_1,...,x'_p\}$, $\mathbf{F}_1 \overset{def}{=} \{y_1,...,y_{k'}\}$ та $\mathbf{F}_2 \overset{def}{=} \{y'_1,...,y'_k\}$. Так як проекції за першою компонентою відношень $U(p',k')$ та $U(p,k)$ не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{E}_1} U(p',k'), \mathbf{max}_{\mathbf{E}_2} U(p,k)\} = \coprod\{k',k\} = k$. Аналогічно встановлюються рівності

$\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{E}_1} U(p',k'), \mathbf{min}_{\mathbf{E}_2} U(p,k)\} = \prod\{k',k\} = k'$.

Залишається показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Так як проекції за другою компонентою відношень $U(p',k)$ та $U(p,k)$ не перетинаються, то згідно з тими самими лемами маємо рівності

$$\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1}(U(p',k')^{-1}), \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2}(U(p,k)^{-1})\} =$$
$$= \coprod\{\mathbf{max}_{\mathbf{F}_1} U(k',p'), \mathbf{max}_{\mathbf{F}_2} U(k,p)\} = \coprod\{p',p\} = p.$$

Аналогічно встановлюються рівності

$$\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1}(U(p',k')^{-1}), \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2}(U(p,k)^{-1})\} =$$
$$= \prod\{\mathbf{min}_{\mathbf{F}_1} U(k',p'), \mathbf{min}_{\mathbf{F}_2} U(k,p)\} = \prod\{p',p\} = p'. \quad \square$$

Для випадку (5,6), подібного до випадку (3,6), відношення будується так: $\mathbf{R} \overset{def}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}_i$, де $\mathbf{R}_0 \overset{def}{=} U(p',k') = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\} \times \{y_1^0,...,y_{k'}^0\}$ та $\mathbf{R}_i \overset{def}{=} U(p'+i,k) = \{x_1^i,...,x_{p'+i}^i\} \times \{y_1^i,...,y_k^i\}$, для $i = 1,2,3,...$; причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{def}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0, x_1^1,...,x_{p'+1}^1,...,x_1^i,x_2^i,...,x_{p'+i}^i,...\}$ та $\mathbf{F} \overset{def}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^0,...y_{k'}^0, y_1^1,...,y_k^1,...,y_1^i,...,y_k^i,...\}$ (див. рисунок 14). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

Нехай $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_i = \{x_1^i,...,x_{p'+i}^i\}$ для $i = 0,1,2,3...$. Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 0,1,2,...$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max_E}(\mathbf{R}) = \coprod_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod\{k',k\} = k$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min_E}(\mathbf{R}) = \prod_{i=0,1,2,...}\mathbf{min}_{\mathbf{E}i}(\mathbf{R}_i) = \prod\{k',k\} = k'$.

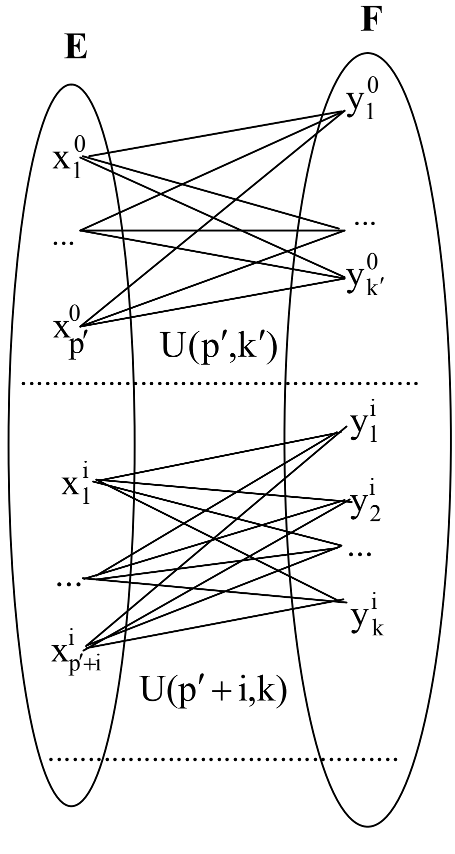


Рис. Б.14. Приклад відношення **R** для випадку (5,6)

Тепер необхідно показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_0) = \{y_1^0,...,y_{k'}^0\}$ та $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i,...,y_k^i\}$ для $i = 1,2,...$; тоді згідно з тими самими лемами отримуються рівності

$\mathbf{max_F}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,...} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,...}(p'+i) = \coprod\{p',p'+1,p'+2,...\} = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності

$$\mathbf{min_F}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,...} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,...}(p'+i) = \prod\{p',p'+1,p'+2,...\} = p'. \square$$

Для останнього випадку (6,6) нехай $i_{\mathbf{max}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{max}(p',k')$, відношення побудуємо так: $\mathbf{R} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}_i$,

де $\mathbf{R}_0 \overset{\text{def}}{=} U(p',k') = \{x_1^0,...,x_{p'}^0\} \times \{y_1^0,...,y_{k'}^0\}$

та $\mathbf{R}_i \overset{\text{def}}{=} U(i_{\mathbf{max}}+i, i_{\mathbf{max}}+i) = \{x_1^i,...,x_{i_{\mathbf{max}}+i}^i\} \times \{y_1^i,...,y_{i_{\mathbf{max}}+i}^i\}$, для $i = 1,2,3,...$; причому елементи вигляду x_j^i, y_j^i покладаються попарно різними; далі, $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2(\mathbf{R}) = \{x_1^0,...,x_{p'}^0, x_1^1,...,x_{i_{\mathbf{max}}+1}^1,...,x_1^i, x_2^i,...,x_{i_{\mathbf{max}}+i}^i,...\}$ та $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}) = \{y_1^0,...y_{k'}^0, y_1^1,...,y_{i_{\mathbf{max}}+1}^1,...,y_1^i,...,y_{i_{\mathbf{max}}+i}^i,...\}$ (див. рисунок 15). Необхідно показати, що так побудоване відношення $\mathbf{R}$ шукане.

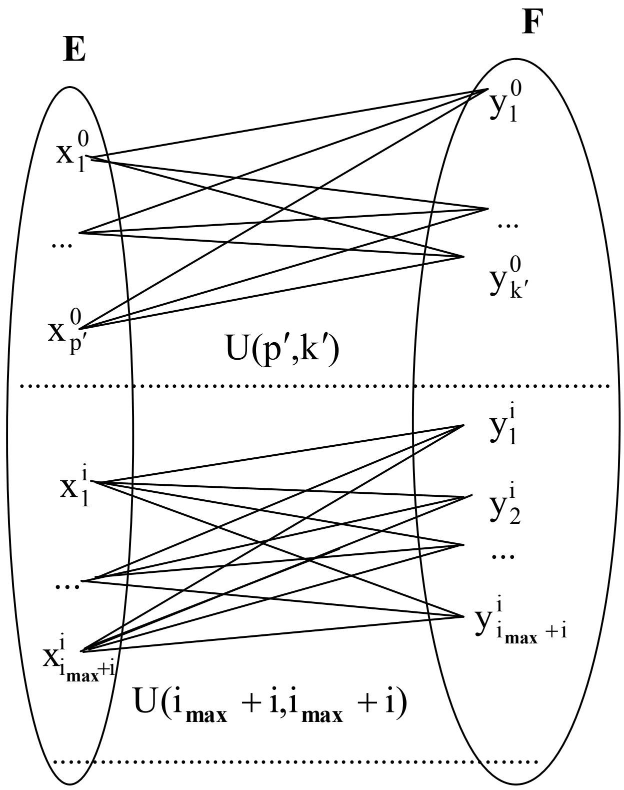


Рис. Б.15. Приклад відношення $\mathbf{R}$ для випадку (6,6)

Нехай $\mathbf{E}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_0 = \{x_1^0,\ldots,x_{p'}^0\}$ та $\mathbf{E}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2\mathbf{R}_i = \{x_1^i,\ldots,x_{i_{\mathbf{max}}+i}^i\}$ для $i = 1,2,3\ldots$ Так як проекції за першою компонентою різних відношень вигляду $\mathbf{R}_i$, де $i = 0,1,2,\ldots$, не перетинаються, то згідно з лемами 3.4, 3.2 отримуються рівності $\mathbf{max}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \coprod\limits_{i=0,1,2,\ldots} \mathbf{max}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \coprod\{k', \coprod\limits_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i)\} = \coprod\limits_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i) = \infty$. Аналогічно встановлюються рівності $\mathbf{min}_{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \prod\limits_{i=0,1,2,\ldots} \mathbf{min}_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{R}_i) = \prod\{k', \prod\limits_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i)\} = k'$.

Тепер необхідно показати, що обернене відношення $\mathbf{R}^{-1}$ шукане. Нехай $\mathbf{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_0) = \{y_1^0,\ldots,y_{k'}^0\}$ та $\mathbf{F}_i \overset{\text{def}}{=} \pi_2^2(\mathbf{R}_i) = \{y_1^i,\ldots,y_{i_{\mathbf{max}}+i}^i\}$ для $i = 1,2,\ldots$; тоді згідно з тими самими лемами отримуються рівності

$$\mathbf{max}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \coprod_{i=0,1,2,\ldots} \mathbf{max}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \coprod\{p', \coprod_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i)\} = \coprod_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i) = \infty.$$

Аналогічно встановлюються рівності

$$\mathbf{min}_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}) = \prod_{i=0,1,2,\ldots} \mathbf{min}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{R}_i^{-1}) = \prod\{p', \prod_{i=1,2,\ldots}(i_{\mathbf{max}} + i)\} = p'. \square$$

Всі можливі випадки розглянуті. □